Análisis funcional

Juan Dodyk

Índice

1 Análisis funcional

1.1 Outline

1. Espacios normados y de Banach.

Un espacio normado es bla. Un espacio de Banach es un normado completo.

Una función lineal es continua sii es acotada. El conjunto de lineales continuas entre dos espacios normados se llama $B(X,Y)$. Es un espacio de Banach.

Si Y es subespacio de X normado, X/Y es normado por $\|x+Y\| = d(x,Y)$; $\pi_{X/Y}$ es continua lineal, abierta y $\|\pi_{X/Y}\| = 1$. Si X Banach, Y cerrado, X/Y es Banach. Si $T \in B(X,Z)$ y $T|_Y = 0$ entonces $T = \overline{T} \circ \pi_{X/Y}$ y $\|\overline{T}\| = \|T\|$.

2. Dimensión finita.

Si $\varphi : X \to \mathbb{F}$ es lineal, es continua sii $\ker\varphi$ es cerrado.

> Supongamos que $\ker\varphi$ es cerrado; $\varphi = 0$ o hay v con $\varphi(v) = 1$. Hay c con $\|v+u\| \geqq c > 0$ para todo $u \in \ker\varphi$. Si $x \in X$, hay $u \in \ker\varphi$ con $x = \varphi(x)v + u$; entonces $\|x\| \geqq c|\varphi(x)|$ y $|\varphi(x)| \leqq \frac{1}{c}\|x\|$, listo.

Todo espacio normado de dimensión finita es de Banach, todas las normas son equivalentes, las bolas cerradas son compactas y todos los operadores que salen de ahí son continuos.

> Sea $u_1, \dots, u_n$ una base; por inducción en n. Sea $f : \mathbb{F}^n \to X$ dada por $f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i u_i$; veamos que es un isomorfismo (obvio) homeomorfo si $\mathbb{F}^n$ tiene la norma $\| \|_\infty$. Que es continua es obvio. Que la inversa es continua es que las proyecciones $\varphi_k : X \to \mathbb{F}$ dadas por $\varphi_k(\sum_{i=1}^n a_i u_i) = a_k$ son continuas. Ahora $\ker \varphi_k = \langle u_1, \dots, \hat{u}_k, \dots, u_n \rangle$, que es Banach por inducción así que cerrado, listo.

Si X es normado, V, W subespacios, V cerrado, W de dim finita, entonces $V + W$ es cerrado.

> Basta verlo para $W = \langle v \rangle$, $v \notin V$. Defino $\varphi : V + W \to \mathbb{F}$ por $\varphi(u + av) = a$; como $\ker \varphi = V$ cerrado es continua. Hay que ver que $V + W$ es completo: si $u_n + a_n v$ de Cauchy, a_n de Cauchy por continuidad de φ, luego converge y listo.

Lema de Riesz. En un espacio normado las bolas cerradas son compactas sii es de dimensión finita.

3. Consecuencias de Baire sobre Banach.

Baire sobre métrico completo.

Todo Banach tiene dimensión no numerable.

Acotación uniforme.

Aplicación abierta. Biyectiva continua tiene inversa continua. Teorema de gráfico cerrado.

4. Espacio dual y Hahn-Banach.

Hahn-Banach 1: si X un $\mathbb{R}$-ev y $m : X \to \mathbb{R}$ tal que $m(ax) = am(x)$ si $a \in \mathbb{R}_{\geqq 0}$ y $m(x + y) \leqq m(x) + m(y)$, entonces si Y es subespacio, $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ es lineal y $\varphi(x) \leqq m(x)$, entonces hay una extensión $\tilde{\varphi} : X \to \mathbb{R}$ que también cumple $\tilde{\varphi}(x) \leqq m(x)$.

> Por Zorn basta ver que se puede agregar un vector li a Y. Queremos poner $\tilde{\varphi}(u) = k$ para que $\tilde{\varphi}(x + au) = \varphi(x) + ak \leqq m(x + au)$, o sea $-m(x - u) + \varphi(x) \leqq k \leqq m(y + u) - \varphi(y)$ para todos $x, y \in Y$. Ahora $m(y + u) - \varphi(y) + m(x - u) - \varphi(x) \geqq 0$, listo.

Hahn-Banach 2: si X es normado, Y subespacio, $\varphi \in B(Y, \mathbb{F})$, hay $\tilde{\varphi} \in B(X, \mathbb{F})$ con $\tilde{\varphi}|_Y = \varphi$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

> Para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ uso lo anterior con $m(x) = \|\varphi\| \|x\|$. Para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ uso el resultado para $\mathbb{R}$ sobre $\operatorname{Re} \varphi$, obtengo ψ y pongo $\tilde{\varphi}(x) = \psi(x) - i\psi(ix)$.

Dual X^*. Si $x \in X$, hay $\varphi \in X^*$ con $\|\varphi\| = 1$ y $\|\varphi(x)\| = \|x\|$. Si S subespacio cerrado, $x \notin S$, hay $\varphi \in X^*$ con $\|\varphi\| = 1$, $\varphi|_S = 0$ y $\|\varphi(x)\| = d(x, S)$. Si X^* es separable, X es separable.

Tenemos $c_c^* = c_0^* = \ell^1$, $(\ell^p)^* = \ell^{p'}$ si $1 \leqq p < \infty$.

Defino $S^\perp = \{\varphi \in X^* \mid \varphi|_S = 0\}$; $\overline{S} = \{x \in X \mid (\forall f \in S^\perp) f(x) = 0\}$, $S^\perp \cong (X/\overline{S})^*$ y $S^* \cong X^*/S^\perp$.

Dada $T \in B(X, Y)$ defino $T^*(Y^*, X^*)$ por $T^*(f) = f \circ T$; vale $\|T^*\| = \|T\|$ y $\operatorname{rg} T^\perp = \ker T^*$.

Doble dual X^{**}. La aplicación $x \mapsto \operatorname{ev}_x$ es una isometría. Si es sobreyectiva X se dice reflexivo. Subespacio cerrado y cociente de reflexivo es reflexivo.

Si X es normado y S subespacio de dim o codim finita (y cerrado) es complementado.

5. Topologías débiles.

Un EVT es bla. Una seminorma es bla. Un EVTLC es bla. ECTLC sii generado por familia de seminormas. Hausdorff sii las seminormas separan puntos.

Si X, Y son EVTLCH, $f \in B(X, Y)$ sii para cada $\| \|$ de X hay finitas $\| \|_i$ de Y con $\|f(x)\| \leqq M \sum_{i=1}^n \|x\|_i$. Si las seminormas son $|f_i(x)|$ con $f_i : X \to \mathbb{F}$ lineal, $i \in I$, entonces $X^* = \langle f_i \rangle_{i \in I}$.

Un EVTLC es metrizable sii está generado por numerables seminormas que separan puntos.

Un espacio de Frechet es un EVTLC metrizable completo. Vale acotación uniforme, aplicación abierta y gráfico cerrado en Frechet.

Dado X EVT se define la topología débil como la generada por las seminormas $\|x\|_f = |f(x)|$ para cada $f \in X^*$; se escribe $x_\alpha \xrightarrow{w} x$, y es $f(x_\alpha) \to f(x)$. Dado X^* se define la topología débil* como la generada por las seminormas $\|f\|_x = |f(x)|$ para cada $x \in X$; se escribe $f_\alpha \xrightarrow{w*} f$, y es $f(x_\alpha) \to f(x)$.

Hahn-Banach geométrico: Si U, V son convexos disjuntos en un EVT X, con U abierto, hay $\varphi \in X^*$ y $t \in \mathbb{R}$ con $\operatorname{Re} \varphi(x) < t \leqq \operatorname{Re} \varphi(y)$ para todo $x \in U, y \in V$.

Hahn-Banach geométrico 2: Si X es EVTLCH, K convexo compacto, V convexo cerrado, $K \cap V = \varnothing$, entonces hay $\varphi \in X^*$ y $t \in \mathbb{R}$ con $\operatorname{Re} f(K) < t < \operatorname{Re} f(V)$.

Si X es EVTLCH y $x \in X$, $x \neq 0$, hay $f \in X^*$ con $f(x) \neq 0$. En particular X^* separa puntos.

Si K es cerrado convexo, es cerrado débil. En particular subespacio cerrado débil sii cerrado.

Hahn-Banach geométrico 3: Si X es EVT tal que X^* separa puntos, K y V convexos compactos y $K \cap V = \varnothing$, entonces hay $\varphi \in X^*$ y $t \in \mathbb{R}$ con $\operatorname{Re} f(K) < t < \operatorname{Re} f(V)$.

Si X es EVTH y $S \subset X^*$ un subespacio, $(S^\perp)^\perp = \overline{S}^{w*}$, la w*-clausura. En particular, los subespacios w*-cerrados son los $E^\perp$, con $E \subset X$ subespacio. Un subespacio $S \subset X^*$ separa puntos sii es w*-denso.

Si X es normado, $\iota : X \to X^{**}$ la inclusión $\iota(x) = \mathrm{ev}_x$, entonces $\iota(B_X(0,1))$ es w*-denso en $B_{X^{**}}(0,1)$.

Si X normado de dim infinita entonces $\overline{\{\|x\| = 1\}}^w = \{\|x\| \leqq 1\}$, donde $\bar{\cdot}^w$ es la w-clausura, y $\{\|x\| \leqq 1\}$ tiene w-interior vacío.

Si X normado entonces X es separable sii $\{f \in X^* \mid \|f\| \leqq 1\}$ es w*-metrizable.

Si X es normado y $x_n \xrightarrow{w} x$ entonces $\{x_n\}$ es acotado y $\|x\| \leqq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|$. (Lo mismo vale en X^* con w*.)

Si X, Y Banach, $f : X \to Y$, $g : Y^* \to X^*$ lineales y $g(\varphi) = \varphi \circ f$ para todo $\varphi \in Y^*$ entonces f y g son continuas.

Si X, Y Banach con $f : X \to Y$ lineal, entonces f es continua sii $f : (X, w) \to (Y, w)$ es continua.

Si X, Y Banach con $g : Y^* \to X^*$ lineal, entonces $g : (Y^*, w^*) \to (X^*, w^*)$ es continua sii $g = f^*$, con $f : X \to Y$ continua.

6. Uniformemente convexos.

Un Banach X se dice *uniformemente convexo* si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$, $\|x\|, \|y\| \leqq 1$ y $\|\frac{1}{2}(x + y)\| > 1 - \delta$ entonces $\|x - y\| < \epsilon$.

Si X es unif convexo entonces $x_n \to x$ sii $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$.

Si X es unif convexo y S es cerrado y convexo, tiene un elemento de norma mínima único.

Si X es unif convexo es reflexivo.

7. El dual de L^p y de $C_0(X)$.

Si X es σ-finito, $L^1(X)^* \cong L^\infty$.

Si $1 < p < \infty$, X es σ-finito, entonces $L^p(X)$ es reflexivo y $L^p(X)^* = L^q(X)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $p \geqq 2$, $L^p(X)$ es uniformemente convexo.

Localmente compactos. Urysohn.

Teorema de Riesz.

8. Banach-Alaoglu, Krein-Milman, Markov-Kakutani.

Banach-Alaoglu, Krein-Milman.

Los extremales de la bola de $\mathcal{M}(X)$ (X LCH) son $c\delta_x$, $|c| = 1$. Los extremales de las medidas de probabilidad son δ_x.

Banach-Stone: si X, Y son LCH y hay una isometría $C(X) \to C(Y)$ entonces X e Y son homeomorfos.

Lyapunov.

Markov-Kakutani. Hahn-Banach invariante.

Hay medidas invariantes y hay medidas ergódicas.

Los grupos abelianos son amenables.

9. Espacios de Hilbert.

Producto interno. Cauchy-Schwarz. Espacios de Hilbert.

Polarización. Pitágoras. Paralelogramos. Hilbert son unif convexos. Proyección de x en S. Complemento ortogonal.

Conjunto y base ortonormal. Bessel, Parseval y Gram-Schmidt.

Riesz.

10. Operadores 1.

Operadores como formas sesquilineales. Polarización en $\mathbb{C}$. $\langle Tx, x\rangle = 0$ implica $T = 0$.

Adjunto.

Operadores normales. Normal sii $\|Tx\| = \|T^*x\|$ para todo x. Si T es normal, $\ker T = \ker T^*$, $\|T^n\| = \|T\|^n$.

Operadores autoadjuntos, sii $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$. Positivos sii autoadjunto y $\langle Tx, x\rangle \geqq 0$. Proyección ortogonal sii $T = T^*$ y $T^2 = T$. Isometría ($TT^* = 1$), unitario ($T^* = T^{-1}$), isometría parcial ($T|_W$ isometría y $T|_{W^\perp} = 0$, sii T^*T proyección).

11. Teoría espectral.

Un álgebra de Banach es bla. GL es abierto.

Espectro, radio espectral. El espectro es compacto no vacío y el radio espectral es lím $\|A^n\|^{1/n}$.

Si álgebra de Banach unital es de división, es $\mathbb{C}$.

Caracteres en álgebra de Banach conmutativa.

C*-álgebras.

Normales, autoadjuntos y unitarios en C*-álgebras. El espectro de un autoadjunto es real.

La transformada de Gelfand es un *-isomorfismo isométrico $\mathcal{U} \to C(\hat{\mathcal{U}})$.

Cálculo funcional: si T es normal hay un *-isomorfismo isométrico $C(\sigma(T)) \to C^*(T)$ con $1 \mapsto 1$ y $\mathrm{id} \mapsto T$.

11. Operadores 2.

$T = T^*$ sii $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. $T \geqq 0$ sii $\sigma(T) \subset \mathbb{R}_{\geqq 0}$. $T^* = T^{-1}$ sii $\sigma(T) \subset \{|z| = 1\}$. $T = T^*, T^2 = T$ sii $\sigma(T) \subset \{0, 1\}$.

$T \geqq 0$ tiene raíz cuadrada. Es inversible sii $T \geqq c$, $c > 0$.

Descomposición polar.

Si T es normal entonces $\sup\limits_{\|x\| \leqq 1} |\langle Tx, x\rangle| = \|T\|$.

12. Operadores compactos y Fredholm.

Compacto, teorema espectral.

Álgebra de Calkin, operadores de Fredholm, índice.

Alternativa de Fredholm.

Hilbert-Schmidt y traza.

1.2 Espacios de Banach

Ejercicio 1. *a*) Si $1 \leqq p \leqq \infty$, $s_f = \{(x_n)_n : x_n = 0 \text{ salvo para finitos } n\}$, entonces s_f es un subespacio de ℓ^p no cerrado. Si $p < \infty$ es denso.

Subespacio: $0 \in s_f$, si $u, v \in s_f$ entonces $u + v \in s_f$; si $u \in s_f$ y $c \in k$ entonces $cu \in s_f$.

No cerrado. Claro porque $(1, 0, \ldots), (1, 1/2, 0, \ldots), (1, 1/2, 1/2^2, 0, \ldots), \ldots$ converge a $(1/2^n)_n \notin s_f$.

Denso si $p < \infty$. Claro porque tomando principios convergemos.

b) Si E es espacio normado y $S \subset E$ subespacio entonces $\overline{S}$ es subespacio.

c) Mostrar que $\ell^p \subset \ell^\infty$. Calcular $\overline{\ell^p}$ en ℓ^∞.

Lo primero es obvio. Lo segundo también porque $\overline{\ell^p} = \ell^p$ porque completo implica cerrado.

Demostración de que $\ell^p(E)$ es Banach ($1 \leqq p < \infty$) si E es Banach.

Tenemos $(u_n)_n$ sucesión de Cauchy, o sea $\|u_n - u_m\| < \epsilon$ si n, m grandes. En particular $(u_{nm})_n$ son de Cauchy para cualquier m. Así que como E es Banach hay $u \in E^{\mathbb{N}}$ con $u_{nm} \to_n u_m$ para cada m. Hay que mostrar que $u \in \ell^p$ y que $u_n \to u$.

Lo primero es que $\sum_m \|u_m\|^p < \infty$. Tenemos $\sum_m \|u_m\|^p = \sum_m \lim\limits_n \|u_{nm}\|^p \leqq \liminf\limits_n \sum_m \|u_{nm}\|^p = \liminf\limits_n \|u_n\|^p < \infty$ porque $(\|u_n\|)_n$ es acotado.

Falta ver que $\|u - u_N\| \to 0$. Tenemos $\|u - u_N\| = (\sum_m \|u_m - u_{Nm}\|^p)^{1/p} = (\sum_m \lim\limits_M \|u_{Mm} - u_{Nm}\|^p)^{1/p} \leqq (\liminf\limits_M \sum_m \|u_{Mm} - u_{Nm}\|^p)^{1/p} = \liminf\limits_M (\sum_m \|u_{Mm} - u_{Nm}\|^p)^{1/p} = \liminf\limits_M \|u_M - u_N\| \leqq \epsilon$ si N, M grandes. Entonces $\|u - u_N\| \leqq \epsilon$ si N es grande, como queríamos.

Otra manera. Falta ver que $\|u - u_N\| \to 0$. Ahora dado ϵ vale que si N, M son grandes $\|u_M - u_N\| \leqq \epsilon$, así que $\sum_{n=1}^k |u_{Mn} - u_{Nn}|^p \leqq \|u_N - u_M\|^p \leqq \epsilon^p$ para todo k. Llevando M al límite obtenemos $\sum_{n=1}^k |u_n - u_{Nn}|^p \leqq \epsilon^p$ para todo k. Llevando k al límite obtenemos $\sum_n |u_n - u_{Nn}|^p \leqq \epsilon^p$ o sea $\|u - u_N\| \leqq \epsilon$, como queríamos.

d) Si E es Banach y S subespacio cerrado entonces S es Banach.

Ejercicio 2. Sea V un k-e.v. y $B \subset V$ tal que:

(*a*) $0 \in B$

(*b*) B es convexo.

(*c*) Si $x \in B$ y $|\lambda| = 1$ entonces $\lambda x \in B$.

(*d*) Si $x \in V$ hay $\lambda > 0$ con $\frac{x}{\lambda} \in B$.

(*e*) Si $x_n = \lambda_n x \in B$ para todo n con $0 \leqq \lambda_n \leqq 1$ y $\lambda_n \to 1$ entonces $x \in B$.

Si definimos $\|x\| = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in B\}$ entonces V resulta normado y $B = \{x \in V \mid \|x\| \leqq 1\}$.

Hay que probar primero que $\| \ \|$ es una norma. Esto es que: está bien definida, que $\|0\| = 0$, que $\|x\| = 0$ implica $x = 0$, que $\|cx\| = |c|\|x\|$ y que $\|u + v\| \leqq \|u\| + \|v\|$.

Que está bien definida es (*d*). Que $\|0\| = 0$ es (*a*). [No se puede mostrar que $\|x\| = 0$ implica $x = 0$.] Que $\|cx\| = |c|\|x\|$ sería: si $\lambda > 0$ cumple que $\frac{cx}{\lambda} \in B$ entonces $\frac{cx}{|c||c|^{-1}\lambda} = \frac{c}{|c|}\frac{x}{|c|^{-1}\lambda} \in B$

y también, multiplicando por $\frac{|c|}{c}$ (por (c)), $\frac{x}{|c|^{-1}\lambda} \in B$, así que $|c|^{-1}\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \mid \frac{x}{\lambda} \in B\}$ y $\lambda \in |c|\{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \mid \frac{x}{\lambda} \in B\}$; la otra inclusión es igual, así que los conjuntos donde se toman los ínfimos son iguales, los ínfimos son iguales y $\|cx\| = |c|\|x\|$, como queríamos.

Falta $\|u+v\| \leqq \|u\| + \|v\|$. Si $\frac{u}{\lambda_1} \in B$ y $\frac{v}{\lambda_2} \in B$ hay que mostrar que $\frac{u+v}{\lambda_1+\lambda_2} \in B$. Por (b) tenemos que $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{u}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{v}{\lambda_2} = \frac{u+v}{\lambda_1+\lambda_2} \in B$, listo.

Resta ver que $B = \{x \in V \mid \|x\| \leqq 1\}$. La inclusión $B \subset \{x \in V \mid \|x\| \leqq 1\}$ es obvia. Ahora $\|x\| \leqq 1$ quiere decir que $x/1 \in B$ o que hay $\lambda_n \to 1$ por encima con $\lambda_n x \in B$ para todo n, pero por (e) con λ_n^{-1} tenemos que x también está en B. Listo.

Ejercicio 3. Si E es normado son equivalentes:

(a) E es Banach,

(b) $\{x \in E : \|x\| \leqq 1\}$ es completo, y

(c) $\{x \in E : \|x\| = 1\}$ es completo.

$(a) \Leftrightarrow (b)$ es obvio porque Cauchy implica acotada.

Si (u_n) no tiende a cero yo digo que hay $M > 0$ con $\|u_n\| \geqq M$ para n grande. En efecto, si no hay quiere decir que para todo $M > 0$ hay n arbitrariamente grande con $\|u_n\| < M$, pero por Cauchy implica $u_n \to 0$. Entonces $\|u_n\| > 0$ para n grande.

Ponemos $a_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Tenemos

$$\|a_n - a_m\| = \left\| \frac{u_n}{\|u_n\|} - \frac{u_m}{\|u_m\|} \right\| = \frac{\|u_n\|u_m\| - u_m\|u_n\|\|}{\|u_n\|\|u_m\|} = \frac{\|(u_n - u_m)\|u_m\| - u_m(\|u_n\| - \|u_m\|)\|}{\|u_n\|\|u_m\|} \leqq$$

$$\leqq \frac{\|u_n - u_m\|\|u_m\| + \|u_m\|\|u_n - u_m\|}{\|u_n\|\|u_m\|} = \frac{2}{\|u_n\|}\|u_n - u_m\| \leqq 2M^{-1}\|u_n - u_m\|$$

así que $(a_n)_n$ también es de Cauchy. Entonces si vale (c) converge a a.

Ahora $(\|u_n\|)_n$ es de Cauchy, luego hay u con $\|u_n\| \to u$. Yo digo que $u_n \to ua$. Esto es $\|u_n - ua\| < \epsilon$. Ahora $\|u_n - ua\| = \|\|u_n\|\frac{u_n}{\|u_n\|} - ua\| = \|(\|u_n\| - u)\frac{u_n}{\|u_n\|} - u(a - \frac{u_n}{\|u_n\|})\| \leqq |\|u_n\| - u| + u\|a - \frac{u_n}{\|u_n\|}\|$, listo. Entonces $u_n \to ua$ y $(c) \Rightarrow (a)$, como queríamos.

Ejercicio 4. Si E es de dimensión finita todas las normas son equivalentes y lo hacen Banach.

Sea $u_1, \ldots, u_n$ una base. Veamos que $f : k^n \to E$ dado por $f(\lambda_i) = \sum_i \lambda_i u_i$ es un homeomorfismo para k^n con la norma máximo. Hay que probar que es biyectiva, continua y con inversa continua.

Biyectiva es obvio. Continua sí porque suma y multiplicación son. Falta que la inversa $f^{-1}(x) = (\pi_1(x), \ldots, \pi_n(x))$ sea continua. Basta ver que cada proyección es continua.

Por inducción en n tenemos que $\{x \in E : \lambda_1 = 0\}$ (de dimensión $n-1$) es completo y por lo tanto cerrado.

Digo lo siguiente: para todo h con $\pi_1(h) = 0$ vale que $\|u_1 - h\| \geqq M > 0$ para algún M. Si no, hay $(h_n)_n$ con $\pi_1(h_n) = 0$ y $\|u_1 - h_n\| \to 0$, o sea $h_n \to u_1$, pero, como $\pi_1^{-1}(0)$ es cerrado, tiene que ser $\pi_1(u_1) = 0$, absurdo.

Ahora $x \in E$ es $x = au_1 + h$ con $\pi_1(h) = 0$. Entonces $|\pi_1(x)| = |\pi_1(au_1 + h)| = |a| = |a|\frac{\|au_1+h\|}{\|au_1+h\|} = |a|\frac{\|au_1+h\|}{|a|\|u_1-(-h)/a\|} \leqq |a|\frac{\|au_1+h\|}{|a|M} = \frac{1}{M}\|au_1 + h\| = \frac{1}{M}\|x\|$ y π_1 es continua como queríamos.

Con esto probamos que las normas son equivalentes en el sentido topológico. Entonces id : $E \to E$ (primero con una y después con la otra norma) es lineal y continua, así que hay M con $\|x\|_1 \leqq M\|x\|_2$. Para ver que E es Banach basta ver que k^n es Banach, pero es obvio usando que k es completo.

Si $f : E \to F$ es lineal, es continua sii hay M con $\|f(x)\| \leqq M\|x\|$.

Continua en cero quiere decir que si $\|x\| < \delta$ entonces $\|f(x)\| < \epsilon$, así que

$$\|f(x)\| = \left\| f\left(\frac{2\|x\|}{\delta}\frac{\delta}{2\|x\|}x\right)\right\| = \frac{2\|x\|}{\delta}\left\| f\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right)\right\| < \frac{2\|x\|}{\delta}\epsilon = \frac{2\epsilon}{\delta}\|x\|.$$

La recíproca es obvia.

Ejercicio 5. Si E es de dimensión finita $\{x \in E : \|x\| \leqq 1\}$ es compacto. (Obvio)

Ejercicio 6. Si $F \subset E$ es de dimensión finita entonces si $x \in E \setminus F$ hay $y \in F$ con $\|x - y\| = d(x, F)$.

Sea y con $\|x - y\| \leqq d + 1$. Tenemos $\|y\| \leqq \|x\| + \|x - y\| \leqq \|x\| + d + 1$. Ahora $\{y \in F : \|y\| \leqq \|x\| + d + 1\}$ es compacto en F, luego $\|x - y\|$, por ser continua, tiene mínimo, como queríamos.

Ejercicio 7. (Lema de Riesz) Si $F \subset E$ es subespacio cerrado propio y $\epsilon > 0$ entonces existe $x \in E$ con $\|x\| = 1$ y $d(x, F) \geqq 1 - \epsilon$.

Sea $x \in E \setminus F$. Tenemos $d = d(x, F) > 0$ porque F es cerrado. Hay $y \in F$ con $\|x-y\| \leqq \frac{d}{1-\epsilon}$. Ponemos $x = \frac{x-y}{\|x-y\|}$. Hay que ver que $d(x, F) \geqq 1 - \epsilon$. Basta ver que $d(x - y, F) \geqq (1 - \epsilon)\|x - y\|$. Ahora $d(x - y, F) = d(x, F) = d$, listo.

Ejercicio 8. Si $\dim E = \infty$ entonces $\{x \in E : \|x\| \leqq 1\}$ no es compacto.

Sea $u_1 \in E$ con $\|u_1\| = 1$ y $F_1 = \langle u_1 \rangle$. Para cada n construimos u_{n+1} como lo que da el Lema de Riesz con $\epsilon = 1/2$ y F_n, o sea $u_{n+1} \in E \setminus F_n$, $\|u_{n+1}\| = 1$ y $d(u_{n+1}, F_n) \geqq 1/2$; ponemos $F_{n+1} = F_n \oplus \langle u_{n+1} \rangle$. Así conseguimos una sucesión $(u_n)_n$ con $\|u_n\| = 1$ y $\|u_n - u_m\| \geqq 1/2$. Si $\{x \in E : \|x\| \leqq 1\}$ fuera compacto, la sucesión tendría una subsecuencia convergente, pero no es de Cauchy, absurdo.

Ejercicio 9. *a*) Si $S \subset E$ es subespacio, S tiene interior no vacío sii $S = E$. (Obvio)

b) Si E es de Banach de dimensión infinita no puede tener una base numerable.

Teorema de Baire dice: en un espacio métrico completo la unión numerable de cerrados con interior vacío tiene interior vacío. Aplicación directa con los generados de los principios de la sucesión de los elementos de la base.

c) Todo k-e.v. se lo puede normar.

Dada una base B podemos definir la norma máximo con respecto a esa base como $\|\sum_i a_i u_i\| = \max_i |a_i|$, donde $u_i \in B$.

d) Todo k-e.v. de dimensión infinita posee dos normas no equivalentes.

Sea B_1 una base, $\| \|_1$ su norma máximo y $(u_n)_n$ una sucesión de elementos de B. Definimos otra base B_2 cambiando los u_n de B por $\frac{1}{n}u_n$ y llamamos $\| \|_2$ a su norma máximo. Si son equivalentes tenemos que $\|x\|_2 \leqq M\|x\|_1$. Esto en los u_n da $n = n\|\frac{1}{n}u_n\|_2 = \|u_n\|_2 \leqq M\|u_n\|_1 = M$ por lo que $n \leqq M$ para todo n, absurdo.

Ejercicio 10. E de Banach tiene dimensión finita sii todo subespacio es cerrado.

Si E tiene dimensión infinita sea $(u_n)_n$ una sucesión de elementos independientes y $F = \langle u_n : n \in \mathbb{N}\rangle$. Si todo fuera cerrado sería completo y de dimensión numerable, lo cual es absurdo por el ejercicio anterior. Luego no es cerrado, como queríamos.

Ejercicio 11. E es Banach sii para toda $(x_n)_n$ vale $\sum_n \|x_n\| < \infty$ implica que existe $\sum_n x_n$.

Que en Banach esas series existen es obvio. Si sabemos que existen las series entonces sea $(u_n)_n$ de Cauchy; basta ver que converge. Ahora tomamos una subsecuencia con $\|u_{n_k} - u_{n_{k+1}}\| < 1/2^k$. Ponemos $x_k = u_{n_{k+1}} - u_{n_k}$ y tenemos que $u_N = u_1 + \sum_{k<N} x_k$. Ahora $\sum_k \|x_k\| \leqq 2 < \infty$ así que $\sum_k x_k$ existe y $\lim_N u_N = u_1 + \sum_k x_k$ también.

Ejercicio 12. Si E, F son normados, normamos $E \times F$ con $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. Tenemos *a*) es una norma, *b*) si E y F son Banach también es $E \times F$, y *c*) tanto $x \mapsto (x, 0)$ como $(x, y) \mapsto x$ son lineales continuas. (Obvio)

Ejercicio 13. Sea E normado y $S \subsetneqq E$ un subespacio cerrado. Normamos E/S con $\|\overline{x}\| = \|x + S\| = d(x, S)$.

a) La proyección $\pi : E \to E/S$ (dada por $\pi(x) = \overline{x}$) es lineal, continua, $\|\pi\| = 1$ y es abierta.

Pruebo que $\|\pi(x)\| \leqq \|x\|$, o sea que $d(x, S) \leqq d(x, 0)$. Obvio porque $0 \in S$. Ahora por el lema de Riesz $\|\pi\| = 1$. Falta que es abierta. Esto es que si $\mathcal{U} \subset E$ es abierto entonces $\pi(\mathcal{U})$ también. Esto es que si $B(x, \epsilon) \subset \mathcal{U}$ entonces hay $\delta > 0$ con $B(\pi(x), \delta) \subset \pi(B(x, \epsilon))$. O sea que para todo x y para todo $\epsilon > 0$ hay $\delta > 0$ tal que $\|\pi(x) - \pi(y)\| < \delta$ implica que hay y_0 con $\pi(y_0) = \pi(y)$ y $\|x - y_0\| < \epsilon$. Ahora $d(x - y, S) < \delta$ implica que hay $h \in S$ con $\|x - y - h\| < 2\delta$, así que está con $y_0 = y + h$ y $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

b) Si E es Banach entonces E/S también.

Sea $(\pi(x_n))_n \subset E/S$ de Cauchy. Tomando subsecuencia podemos asumir que $\|\pi(x_n) - \pi(x_{n+1})\| < 1/2^n$. Ponemos $u_1 = x_1$ y u_n con $\pi(u_n) = \pi(x_n)$ pero $\|u_{n-1} - u_n\| < 1/2^{n-2}$. Ahora $(u_n)_n$ es de Cauchy así que tiene límite u. Aplicamos π y obtenemos $\pi(u_n) \to \pi(u)$, que es $\pi(x_n) \to \pi(u)$, como queríamos.

Ejercicio 14. En ℓ^∞/c_0 la norma de x es $\limsup_n |x_n|$.

La norma es $d(x, c_0)$ o sea $\inf_{y\in c_0} \sup_n |x_n - y_n|$. Ahora sea $y \in c_0$. Dado ϵ para n grande vale $|x_n| \leqq |x_n - y_n| + |y_n| \leqq |x_n - y_n| + \epsilon$, así que tomando límite superior a ambos lados obtenemos $\limsup_n |x_n| \leqq \limsup_n |x_n - y_n| + \epsilon \leqq \sup_n |x_n - y_n| + \epsilon$. Llevando ϵ a cero obtenemos $\limsup_n |x_n| \leqq \sup_n |x_n - y_n|$. Tomando ínfimo en $y \in c_0$ obtenemos $\limsup_n |x_n| \leqq \inf_{y\in c_0} \sup_n |x_n - y_n|$. Ahora para cada k sea (y_n) la sucesión que tiene los primeros k términos iguales a x_n y el resto cero. Tenemos $\inf_{y\in c_0} \sup_n |x_n - y_n| \leqq \sup_n |x_n - y_n| = \sup_{n>k} |x_n|$. Tomando límite en k obtenemos $\inf_{y\in c_0} \sup_n |x_n - y_n| \leqq \limsup_n |x_n|$. Entonces en la igualdad buscada, que es $\inf_{y\in c_0} \sup_n |x_n - y_n| = \limsup_n |x_n|$, valen las dos desigualdades. Listo.

Ejercicio 15. Si E es normado y V, W son subespacios con V cerrado y W de dimensión finita entonces $V + W$ también es cerrado.

Por inducción basta ver que $V + \langle v \rangle$ es cerrado con $v \notin V$. Ahora $\|v + h\| \geqq M > 0$ para cualquier $h \in V$, porque si no hay h_n con $\|v + h_n\| \to 0$, $-h_n \to v$ y $v \in V$, absurdo (por clausura de V). Ahora sea $(a_n v + h_n)_n \to u$. Hay que probar que $u \in V + W$. Tenemos $\|(a_n - a_m)v + (h_n - h_m)\| = |a_n - a_m|\|v + \frac{h_n - h_m}{a_n - a_m}\| \geqq |a_n - a_m|M$ así que $(a_n)_n$ es de Cauchy. Entonces hay $a \in k$ con $a_n \to a$. Tenemos $\|h_n - (u - av)\| = \|(a_n v + h_n) - u\| + \|av - a_n v\|$ así que $h_n \to u - av$. Ahora V es cerrado, luego $u - av = h \in V$ y $u = av + h \in V + W$.

Ejercicio 16. Si K es normado y compacto entonces $C(K, \mathbb{C}^n)$ con la norma infinito es de Banach. Si $K \subset \mathbb{C}^m$, es separable.

Hay que probar que límite f de uniformemente continuas $(f_n)_n$ es uniformemente continua. Sea $\epsilon > 0$. Quiero $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ si $\|x - y\| < \delta$. Ahora $\|f(x) - f(y)\| \leqq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(y)\| + \|f_n(y) - f(y)\| \leqq 2\|f - f_n\| + \|f_n(x) - f_n(y)\|$. Tomo n grande para que $\|f - f_n\| < \frac{2}{3}\epsilon$. Pido δ para que $\|f_n(x) - f_n(y)\| < \frac{1}{3}\epsilon$. Listo. Que es separable sale por Stone-Weierstrass.

Ejercicio 17. Probar que los siguientes espacios son Banach con sus respectivas normas, donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$.

a) $C^r(\overline{\Omega})$ con $\|f\| = \|f\|_\infty + \sum \|f_{x_i}\|_\infty + \cdots + \sum \|f_{x_1,\ldots,x_r}\|_\infty$.

Si $(f_n)_n$ es de Cauchy tenemos que, para cada α, $(f_n^\alpha)_n$ son de Cauchy en L^∞. Entonces para cada α hay $g(\alpha)$ con $f_n^\alpha \to g(\alpha)$ uniformemente. Si ponemos $f = g(0)$ tenemos $f_n^\alpha \to f^\alpha$ uniformemente para todo α. Entonces $f_n \to f$ en $C^r(\overline{\Omega})$, como queríamos.

Si $f : E \to F$ es continua y derivable en el segmento $[a, b]$ entonces $f(a) - f(b) = f'(c)(b - a)$ con $c = a + t(b - a)$, $t \in (0, 1)$. Además $\|f(b) - f(a)\| \leqq \|b - a\| \sup\limits_{0 \leqq t \leqq 1} \|f'(a + t(b - a))\|$.

La función $g(t) = f(a + t(b - a))$ tiene derivada $g'(t)(x) = f'(a + t(b - a))(x(b - a))$. Entonces $g(1) - g(0) = g'(\xi)(1)$ da $f(b) - f(a) = f'(a + \xi(b - a))(b - a)$. Ahora tomando norma obtenemos $\|f(b) - f(a)\| \leqq \|f'(a + (b - a)c)\|\|b - a\| \leqq \|b - a\| \sup\limits_{0 \leqq \xi \leqq 1} \|f'(a + \xi(b - a))\|$.

Si $f_n' \to g$ uniformemente en $A \subset E$ (de Banach) abierto conexo y hay $x_0 \in A$ tal que $(f_n(x_0))$ converge entonces hay f con $f_n \to f$ uniformemente y $f' = g$.

Si $(f_n(x_0))_n$ converge y $x \in B(x_0, r) \subset A$ entonces $\|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))\| \leqq \|x - x_0\| \sup\limits_{z \in B(x_0, r)} \|f_n'(z) - f_m'(z)\| \leqq r\|f_n' - f_m'\|$, además $\|f_n(x) - f_m(x)\| \leqq \|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))\| + \|f_n(x_0) - f_m(x_0)\|$ y resulta que $(f_n(x))_n$ también converge (porque E es de Banach). Probamos entonces que $(f_n(x))_n$ converge en todo A.

Sea f dada por $f(x) = \lim\limits_n f_n(x)$. Tenemos $\|f(x) - f_n(x)\| \leqq \|f(x) - f_m(x)\| + \|f_m(x) - f_n(x)\| \leqq \epsilon$ si n grande independientemente de x así que $f_n \to f$.

Resta probar que $f' = g$ o sea que $\|f(x + t) - f(x) - g(x)(t)\| \leqq \epsilon\|t\|$ si $\|t\| < \delta$. Ahora $\|f(x+t) - f(x) - g(x)(t)\| \leqq \|(f(x+t) - f(x)) - (f_n(x+t) - f_n(x))\| + \|f_n(x+t) - f_n(x) - f_n'(x)(t)\| + \|f_n'(x)(t) - g(x)(t)\|$. Tenemos $\|(f_m(x + t) - f_m(x)) - (f_n(x + t) - f_n(x))\| \leqq \|t\|\|f_m' - f_n'\|$ por valor medio. Llevando m al límite obtenemos $\|(f(x + t) - f(x)) -$

$(f_n(x+t) - f_n(x))\| \leqq \|t\|\|g - f_n'\|$. Ahora $\|f_n'(x)(t) - g(x)(t)\| \leqq \|f_n' - g\|\|t\|$. Entonces $\|f(x+t) - f(x) - g(x)(t)\| \leqq 2\|t\|\|f_n' - g\| + \|f_n(x+t) - f_n(x) - f_n'(x)(t)\|$. Así que si tomamos n grande para que $\|f_n' - g\| < \frac{\epsilon}{3}$ y luego $\|t\|$ chico para que $\|f_n(x+t) - f_n(x) - f_n'(x)(t)\| \leqq \frac{\epsilon}{3}\|t\|$ obtenemos lo que queríamos.

b) $\mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$ con $\|f\| = \|f\|_\infty + \sup\limits_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{\|f(x)-f(y)\|}{\|x-y\|}$.

Primero hay que ver que es una norma. Es bastante claro porque $\sup(a+b) \leqq \sup(a) + \sup(b)$.

Ahora hay que ver que es completo. Sea $(f_n)_n$ de Cauchy. Por el término $\|f\|_\infty$ sabemos que convergen uniformemente a f. Hay que ver que es Lipschitz y después que $f_n \to f$ en $\mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$.

Primero vemos que hay un M universal tal que $\|f_n(x) - f_n(y)\| \leqq M\|x - y\|$. Ese M basta que cumpla $\|f_n\| \leqq M$ para todo n. Ahora Cauchy implica acotada.

Tenemos $\|f(x) - f(y)\| \leqq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(y)\| + \|f_n(y) - f(y)\| \leqq M\|x - y\| + \|f(x) - f_n(x)\| + \|f(y) - f_n(y)\|$. Tomando límite tenemos $\|f(x) - f(y)\| \leqq M\|x - y\|$. Entonces $f \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$.

Falta ver que $f_n \to f$, o sea que $\|f_n - f\| \to 0$. Que $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ lo sabemos. Llamemos $\|f\|_L$ a $\sup\limits_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{\|f(x)-f(y)\|}{\|x-y\|}$. Basta ver que $\|f_n - f\|_L \to 0$. Esto es que para todo ϵ existe n_0 tal que si $n \geqq n_0$, $\|(f(x) - f_n(x)) - (f(y) - f_n(y))\| \leqq \epsilon\|x - y\|$ para todo x, y. El n_0 es tal que $\|f_n - f_m\| < \frac{\epsilon}{2}$ para $n, m \geqq n_0$. Entonces tengo $\|(f(x) - f_n(x)) - (f(y) - f_n(y))\| \leqq \|f(x) - f_m(x)\| + \|f(y) - f_m(y)\| + \|(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(y) - f_n(y))\| \leqq 2\|f - f_m\|_\infty + \frac{\epsilon}{2}\|x - y\|$. Ahora con m grande tengo $\|f - f_m\| < \frac{\epsilon}{4}\|x - y\|$ así que $\|(f(x) - f_n(x)) - (f(y) - f_n(y))\| \leqq \epsilon\|x - y\|$, como queríamos.

c) $C^\alpha(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$ con $\|f\| = \|f\|_\infty + \sup\limits_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{\|f(x)-f(y)\|}{\|x-y\|^\alpha}$. ¿Qué pasa si $\alpha > 1$?

Creo que exactamente lo mismo.

d) $BV([0,1]) \cap C([0,1])$ con $\|f\| = \|f\|_\infty + \sup\limits_{0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} \|f(a_{i+1}) - f(a_i)\|$.

Primero hay que ver que es norma. De nuevo obvio porque $\sup\limits_x(ca_x) = c\sup(a_x)$ y $\sup(a+b) \leqq \sup(a) + \sup(b)$.

Ahora hay que ver que si $(f_n)_n$ son de Cauchy convergen a una función continua y de variación acotada. Hay f con $f_n \to f$ continua. Falta ver que es de variación acotada y que $\|f - f_n\| \to 0$.

Como $(f_n)_n$ es de Cauchy es acotada. Entonces sea M con $\|f_n\| \leqq M$. Tenemos $\sum_{i=0}^{n-1} \|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| \leqq \sum_{i=0}^{n-1} \|f(a_{i+1}) - f(a_i) - (f_n(a_{i+1}) - f_n(a_i))\| + \sum_{i=0}^{n-1} \|f_n(a_{i+1}) - f_n(a_i)\| \leqq \sum_{i=0}^{n-1} \|f(a_{i+1}) - f(a_i) - (f_n(a_{i+1}) - f_n(a_i))\| + M$. Llevando al límite obtenemos $\sum_{i=0}^{n-1} \|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| \leqq M$. Tomando supremo obtenemos que f es de variación acotada.

Resta ver que $\|f - f_n\|_{BV} \to 0$. Ahora $\sum_{i=0}^{n-1} \|(f(a_{i+1}) - f_n(a_{i+1})) - (f(a_i) - f_n(a_i))\| \leqq \sum_{i=0}^{n-1} \|(f(a_{i+1}) - f_m(a_{i+1})) - (f(a_i) - f_m(a_i))\| + \sum_{i=0}^{n-1} \|(f_n(ai+1) - f_m(a_{i+1})) - (f_n(a_i) - f_m(a_i))\|$. Si tomamos $n, m \geqq n_0$ grande el segundo término se hace chico independientemente de los a_i; si tomamos además m grande el primero también se vuelve chico. Entonces con pedir $n \geqq n_0$ obtenemos $\sum_{i=0}^{n-1} \|(f(a_{i+1}) - f_n(a_{i+1})) - (f(a_i) - f_n(a_i))\| \leqq \epsilon$ para todos a_i y $\|f - f_n\|_{BV} \leqq \epsilon$, como queríamos.

e) Espacios de Sobolev. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Decimos que f en $L^p(\Omega)$ tiene derivadas débiles si para todo i existe $g_i \in L^p$ con

$$\int_\Omega f\varphi_{x_i} + \int_\Omega g_i\varphi = 0$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty$ (con soporte compacto). Luego $W^{1,p}(\Omega)$, el conjunto de las funciones en L^p con derivadas débiles, con $\|f\| = \|f\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \|g_i\|_{L_p}$ es un espacio de Banach.

Creo que lo único no trivial es ver que la norma está bien definida, viz. que las derivadas débiles son únicas en L^p. Si g_i y $\tilde{g}_i$ son dos derivadas hay que ver que $\|g_i - \tilde{g}_i\|_{L_p} = 0$. Supongamos que no. Entonces hay $\epsilon > 0$ con $g_i - \tilde{g}_i \geqq \epsilon$ sobre un E con $\mu(E) > 0$. Con aproximar $\mathbb{1}_E$ por funciones en C^∞ estamos. Para esto basta con aproximar un $\mathbb{1}_E$ con E intervalo generalizado con C^∞. Esto se puede con una convolución según Wikipedia. Tendría que estudiarlo, pero el resultado está.

Ejercicio 18. Si $f : E \to F$ es lineal es equivalente que sea continua, continua en 0 y que haya M con $\|f(x)\| \leqq M\|x\|$.

Ejercicio 19. Vale que $\forall x(\|f(x)\| \leqq M\|x\|)$ es equivalente a $\forall x(\|x\| < 1 \Rightarrow \|f(x)\| \leqq M)$.

Si $\|f(x)\| \leqq M\|x\|$ siempre entonces si $\|x\| < 1$, $\|f(x)\| \leqq M\|x\| \leqq M$.

Ahora $\|(1-\frac{1}{n})\frac{1}{\|x\|}x\| = 1-\frac{1}{n} < 1$ entonces $\|f((1-\frac{1}{n})\frac{1}{\|x\|}x)\| \leqq M$. Ahora $\|f((1-\frac{1}{n})\frac{1}{\|x\|}x)\| = \|(1-\frac{1}{n})\frac{1}{\|x\|}f(x)\| = (1-\frac{1}{n})\frac{1}{\|x\|}\|f(x)\|$. Entonces tenemos $(1-\frac{1}{n})\frac{1}{\|x\|}\|f(x)\| \leqq M$. Llevando n al límite obtenemos $\frac{1}{\|x\|}\|f(x)\| \leqq M$ y $\|f(x)\| \leqq M\|x\|$, como queríamos.

Ejercicio 20. Si $\varphi : E \to k$ es lineal entonces es continua sii $\ker\varphi$ es cerrado.

Supongamos que $H = \ker\varphi$ es cerrado. Si $H = E$ entonces $\varphi = 0$ y listo. Entonces sea $v \in E \setminus H$. Como H es cerrado, $d(v, H) > 0$. Entonces yo digo que hay $M > 0$ con $\|v + h\| \geqq M$ para todo $h \in H$. Si no hay $(h_n)_n$ con $\|v + h_n\| \to 0$ y $-h_n \to v$, absurdo porque $v \notin H$.

Ahora si $w \in E \setminus H$ tenemos $\varphi(\frac{1}{\varphi(v)}v) = 1$ y $\varphi(\frac{1}{\varphi(w)}w) = 1$, por lo que $\varphi(\frac{1}{\varphi(v)}v) = \varphi(\frac{1}{\varphi(w)}w)$, $\frac{1}{\varphi(v)}v - \frac{1}{\varphi(w)}w = h \in H$ y $w = \frac{\varphi(w)}{\varphi(v)}v - \varphi(w)h$. Resulta que todo $x \in E$ es de la forma $av + h$ con $a \in k$ y $h \in H$.

Entonces $|\varphi(x)| = \|\varphi(av + h)\| = |a\varphi(v)| = |a\varphi(v)|\frac{\|v+\frac{1}{a}h\|}{\|v+\frac{1}{a}h\|} \leqq |a\varphi(v)|\frac{\|v+\frac{1}{a}h\|}{M} = \frac{|\varphi(v)|}{M}|a|\|v + \frac{1}{a}h\| = \frac{|\varphi(v)|}{M}\|av + h\| = \frac{|\varphi(v)|}{M}\|x\|$. Resulta que $|\varphi(x)| \leqq \frac{|\varphi(v)|}{M}\|x\|$ y φ es continua.

Ahora hay que probar el recíproco: si φ es continua entonces el núcleo $H = \ker\varphi$ es cerrado. Ahora si $h_n \to h$ con $h_n \in H$ aplicando φ (lo cual se puede porque es continua) obtenemos $\varphi(h_n) \to \varphi(h)$ o sea $0 \to \varphi(h)$, y $\varphi(h) = 0$, por lo que $h \in H$, como queríamos.

Ejercicio 21. Probar que las siguientes funciones son lineales, continuas y hallar su norma.

a) $\varphi : c \to \mathbb{C}$ con $\varphi(x) = \lim_n x_n$.

Linealidad obvia. Norma sería el M ínfimo tal que $|\lim_n x_n| \leqq M \sup_n |x_n|$. Con $x_n = 1$ obtenemos $1 \leqq M$. Ahora $|x_n| \leqq \sup_n |x_n|$ llevado al límite da $\lim_n |x_n| \leqq \sup_n |x_n|$; como $|\lim_n x_n| = \lim_n |x_n|$ obtenemos $|\lim_n x_n| \leqq \sup_n |x_n|$ así que $M \leqq 1$. Conclusión: $M = 1$.

b) $\varphi : L^2[-1, 1] \to \mathbb{C}$ con $\varphi(f) = \int_{-1}^1 tf(t)\,dt$.

Por Cauchy-Schwarz vale $|\int_{-1}^{1} tf(t)\,dt| \leqq \sqrt{\int_{-1}^{1} t^2\,dt}\|f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ y por supuesto con $f(t) = t$ hay igualdad así que $\|\varphi\| = 1$.

b′) $\varphi : C[-1,1] \to \mathbb{C}$ con $\varphi(f) = \int_{-1}^{1} tf(t)\,dt$.

Tenemos $|\int_{-1}^{1} tf(t)\,dt| \leqq 2\sup_n |tf(t)|$ y resulta $\|\varphi\| \leqq 2$. Ahora sean

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } t \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ n^2 t & \text{si no} \end{cases}$$

Entonces $|\int_{-1}^{1} tf_n(t)\,dt| = 2 - 2/n + \int_{-1/n}^{1/n} tn^2t = 2 - 2/n + \frac{2}{3n} = 2 - \frac{4}{3n}$ y $\sup_n |tf(t)| = 1$. Luego $\|\varphi\| \geqq \frac{|\varphi(f_n)|}{\|f_n\|} = 2 - \frac{4}{3n}$. Llevando n al límite obtenemos $\|\varphi\| \geqq 2$ así que $\|\varphi\| = 2$.

c) $\varphi : \ell^\infty \to \mathbb{C}$ con $\varphi(x) = x_1 + x_2$.

Obvio: $|x_1 + x_2| \leqq 2\sup_n |x_n|$ con igualdad con $x_n = 1$ así que $\|\varphi\| = 2$.

c′) $\varphi : \ell^2 \to \mathbb{C}$ con $\varphi(x) = x_1 + x_2$.

Tenemos $|x_1 + x_2| \leqq \sqrt{2}\sqrt{\sum_n x_n^2}$ por CS y por supuesto con $x_1 = x_2 = 1$ y el resto cero hay igualdad así que $\|\varphi\| = \sqrt{2}$.

d) $\varphi : \ell^1 \to \mathbb{C}$ con $\varphi(x) = \sum_n \frac{x_n}{n}$.

De $|\sum_n \frac{x_n}{n}| \leqq \sum_n \frac{|x_n|}{n} \leqq \sum_n |x_n| = \|x\|$ sale que $\|\varphi\| \leqq 1$. Con $x_1 = 1$ y el resto cero se ve que $\varphi\| \geqq 1$ así que $\|\varphi\| = 1$.

d′) $\varphi : \ell^2 \to \mathbb{C}$ con $\varphi(x) = \sum_n \frac{x_n}{n}$.

Tenemos $|\sum_n \frac{x_n}{n}| \leqq \sqrt{\sum_n \frac{1}{n^2}}\|x\|$ sale que $\|\varphi\| \leqq \sqrt{\sum_n \frac{1}{n^2}}$. Con $x_n = \frac{1}{n}$ se ve que $\|\varphi\| \geqq \sqrt{\sum_n \frac{1}{n^2}}$ así que $\|\varphi\| = \sqrt{\sum_n \frac{1}{n^2}}$.

e) $\varphi : c_0 \to \mathbb{C}$ con $\varphi(x) = \sum_n \frac{x_n}{2^n}$.

Tenemos $|\sum_n \frac{x_n}{2^n}| \leqq \sum_n \frac{|x_n|}{2^n} \leqq \sum_n |x_n| \leqq \sup_n |x_n|$ con igualdad si $x_1 = 1$ y el resto cero así que $\|\varphi\| = 1$.

Ejercicio 22. Si $\varphi : E \to \mathbb{C}$ es lineal tal que para toda sucesión $(x_n)_n$ con $x_n \to 0$ vale $\varphi(x_n)$ acotada entonces φ es continua.

Si φ no es continua hay, para cada n, x_n con $\frac{\|\varphi(x_n)\|}{\|x_n\|} \geqq n$. Entonces $\|\varphi(\frac{1}{\sqrt{n}\|x_n\|}x_n)\| = \frac{1}{\sqrt{n}\|x_n\|}\|\varphi(x_n)\| \geqq \sqrt{n}$. Así que $\tilde{x}_n = \frac{1}{\sqrt{n}\|x_n\|}x_n$ cumplen que $\|\tilde{x}_n\| \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}$, y $\tilde{x}_n \to 0$, pero $\|\varphi(\tilde{x}_n)\| \geqq \sqrt{n}$, no acotado. Absurdo.

Ejercicio 23. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Si pensamos que A es un operador lineal $A(x) = Ax$ en $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con la norma euclídea entonces probar que $\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es autovalor de } A\}$.

Si $u_1, \ldots, u_n$ es una base ortonormal de autovectores con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ entonces $\|Ax\| = \|A(\sum_i a_i u_i)\| = \|\sum_i a_i A u_i\| = \|\sum_i a_i \lambda_i u_i\| \leqq \sum_i |\lambda_i| \|a_i u_i\| \leqq \max_i |\lambda_i| \sum_i \|a_i u_i\| = \max_i |\lambda_i| \, \|\sum_i a_i u_i\| = \max_i |\lambda_i| \|x\|$ con igualdad $x = u_k$ con $|\lambda_k| = \max_i |\lambda_i|$.

Ejercicio 24. Sea α una sucesión de números complejos y $1 \leqq p < \infty$. Definimos $M_\alpha : \ell^p \to \ell^p$ por $M_\alpha((x_n)_n) = (\alpha_n x_n)_n$. Probar:

a) M_α está bien definida sii $\alpha \in \ell^\infty$. En ese caso $\|M_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$.

Si $\alpha \in \ell^\infty$ tenemos $\|M_\alpha((x_n)_n)\|_p \leqq \|\alpha\|_\infty \|(x_n)_n\|_p$ y M_α está bien definida. Si $\alpha \notin \ell^\infty$, podemos formar una secuencia $n_1 < n_2 < \cdots$ de naturales tales que $|\alpha_{n_N}| \geqq N^{1/p}$. Ahora definimos x_n de manera que vale cero siempre salvo que $x_{n_N} = \frac{1}{N^{2/p}}$. Se comprueba que $(x_n)_n$ está en ℓ^p. Ahora $\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n x_n|^p = \sum_{N=1}^\infty |\alpha_{n_N} x_{n_N}|^p \geqq \sum_{N=1}^\infty N \frac{1}{N^2} = \sum_{N=1}^\infty \frac{1}{N} = \infty$. Entonces $M_\alpha((x_n)_n)$ no está en ℓ^p y M_α no está bien definida. Ahora que $\|M_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$ es trivial evaluando en e_n.

(*b*) M_α es isomorfismo sii $(\forall n) a_n \neq 0$ y $(\frac{1}{a_n})_n \in \ell^\infty$.

M_α siempre es lineal. Si $(\forall n) a_n \neq 0$ y $(\frac{1}{a_n})_n \in \ell^\infty$ entonces $M_{(\frac{1}{a_n})_n}$ es la inversa. Si no, primero comprobamos fácilmente que $(\forall n) a_n \neq 0$ y luego hacemos lo mismo que en el punto anterior: tomamos n_N con $\frac{1}{a_{n_N}} \geqq N^{1/p}$ y ponemos x_n que valga cero siempre salvo que $x_{n_N} = \frac{1}{\alpha_{n_N}} \frac{1}{N^{2/p}}$. Ahora $M_\alpha(x)$ está en ℓ^p, luego hay $y \in \ell^p$ con $M_\alpha(y) = M_\alpha(x)$, luego mirando punto por punto $y = x$ así que $x \in \ell^p$, absurdo.

Ejercicio 25. Sea $\varphi : X \to \mathbb{C}$ medible, X σ-finito, $1 \leqq p < \infty$ y $M_\varphi : L^p \to L^p$ dado por $M_\varphi(f) = \varphi f$. Probar que M_φ está bien definida sii $\varphi \in L^\infty$. En ese caso $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.

Como en el anterior. Hago sólo $p = 1$, los otros son iguales. Pongo $E_n = \{n \leqq |\varphi| < n+1\}$. Si φ no está en L^∞ entonces hay una subsecuencia n_N con $(\forall N)\mu(E_{n_N}) > 0$. Los puedo tomar finitos porque X es σ-finito. Defino $f = \sum_{N=1}^\infty \frac{\mathbb{1}_{E_{n_N}}}{\mu(E_{n_N})} \frac{1}{N n_N}$. Se ve que $f \in L^1$. Ahora $\int |\varphi f| = \sum_{N=1}^\infty \int_{E_{n_N}} \frac{|\varphi|}{\mu(E_{n_N}) N n_N} \geqq \sum_{N=1}^\infty \int_{E_{n_N}} \frac{1}{\mu(E_{n_N}) N} = \sum_{N=1}^\infty \frac{1}{N} = \infty$. Entonces M_φ no está bien definida. Veamos que $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. Una desigualdad es trivial. Para la otra si $M = \|\varphi\|_{L^\infty}$, $\mu(|\varphi| \geqq M - \epsilon) > 0$ entonces $f = \mathbb{1}_{|\varphi| \geqq M-\epsilon}$ hace $\frac{\int |\varphi f|}{\int |f|} \geqq M - \epsilon$ y $\|M_\varphi\| \geqq M$.

1.3 Operadores acotados en espacios de Banach

Ejercicio 26. Si E es Banach, a_n en $\mathcal{L}(E)$ inversibles, $a_n \to a$, $a \in \mathcal{L}(E)$ no inversible, entonces $\|a_n^{-1}\| \to \infty$.

Si no $\|a_n^{-1}\| \to \infty$ hay M con $\|a_n^{-1}\| \leqq M$. Ahora sea n grande tal que $\|a - a_n\| < \frac{1}{M} \leqq \frac{1}{\|a_n^{-1}\|}$, por lo que $\|a_n^{-1}\|\|a - a_n\| < 1$. Ahora $a = a_n + a - a_n = a_n(1 + a_n^{-1}(a - a_n))$. Tenemos $\|a_n^{-1}(a - a_n)\| \leqq \|a_n^{-1}\|\|a - a_n\| < 1$ así que $1 + a_n^{-1}(a - a_n)$ es inversible, luego $a = a_n(1 + a_n^{-1}(a - a_n))$ también, absurdo.

Ejercicio 27. Si X Banach, Y normado, $\{f_i\}_{i \in I} \in \mathcal{L}(X, Y)$ tales que para todo $x \in X$ vale que $\{|f_i(x)|\}$ es acotado, entonces hay M con $\|f_i\| \leqq M$ para todo $i \in I$.

Sea $E_N = \{x \in X \mid (\forall i \in I) f_i(x) \leqq N\}$. Son cerrados y $X = \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N$. Por Baire hay N tal que E_N contiene una bola $B(x_0, r)$. Es decir, para todo $x \in B(x_0, r)$ vale $|f_i(x)| \leqq N$. Luego $|f_i(x)| = |f_i(x + x_0) - f_i(x_0)| \leqq 2N$ si $x \in B(0, r)$ y $|f_i(x)| \leqq \frac{4N}{r}\|x\|$ para todo $x \in X$, listo.

Ejercicio 28. Si $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ con X, Y Banach entonces f es sobreyectiva sii $f(X)$ es de segunda categoría sii hay M con $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(f(x) = y$ y $\|x\| \leqq M\|y\|)$, sii f es abierta.

Si f es sobre, $f(X) = Y$; como Y es Banach, es de segunda categoría.

Sean $\mathcal{U} = B_1(0) \subset X$ y $\mathcal{V} = B_1(0) \subset Y$. Si $f(X)$ es de segunda categoría, como $f(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(n\mathcal{U})$, hay n con $f(n\mathcal{U})$ es denso en una bola $B_r(c)$. Entonces si $v \in \mathcal{V}$ y $\epsilon > 0$, hay $x \in f(n\mathcal{U})$ con $\|c + rv - f(x)\| < \epsilon$. Entonces si $v \in \mathcal{V}$ y $\epsilon > 0$, hay $x \in f(2n\mathcal{U})$ con $\|f(x) - rv\| < \epsilon$. Así que si $v \in \mathcal{V}$ y $\epsilon > 0$ hay $x \in f(\frac{2n}{r}\mathcal{U})$ con $\|f(x) - v\| < \epsilon$. Entonces si $y \in Y$ y $\epsilon > 0$, sobre $\frac{y}{2\|y\|} \in \mathcal{U}$ y $\frac{\epsilon}{2\|y\|}$ obtenemos $x_0 \in f(\frac{2n}{r}\mathcal{U})$ con $\|f(x_0) - \frac{y}{2\|y\|}\| < \frac{\epsilon}{2\|y\|}$ así que $\|f(2\|y\|x_0) - y\| < \epsilon$. Poniendo $x = 2\|y\|x_0$ y $M = \frac{4n}{r}$ obtenemos que si $y \in Y$ y $\epsilon > 0$ hay $x \in X$ con $\|x\| \leqq M\|y\|$ y $\|f(x) - y\| < \epsilon$. Ahora si $y \in Y$ ponemos $\epsilon = \frac{1}{2}\|y\|$ y obtenemos x_1 con $\|x_1\| \leqq M\|y\|$ y $\|f(x) - y\| < \frac{1}{2}\|y\|$. Ahora aplicamos el resultado sobre $y' = f(x) - y$ y $\epsilon = \frac{1}{4}\|y\|$, obteniendo x_1 con $\|x_1\| \leqq M\|f(x) - y\| < \frac{1}{2}M\|y\|$ y $\|f(x_1) + f(x_2) - y\| < \frac{1}{4}\|y\|$. Seguimos y vamos obteniendo x_n con $\|x_n\| \leqq \frac{1}{2^{n-1}}M\|y\|$ y $\|f(x_1) + \cdots + f(x_n) - y\| < \frac{1}{2^n}\|y\|$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge así que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ también a x con $\|x\| \leqq 2M\|y\|$ y $f(x) = y$.

Hay que ver que f es abierta. Si $\mathcal{U} \subset X$ es abierto, $x_0 \in \mathcal{U}$ y $y_0 = f(x_0)$ hay que ver que hay $\epsilon > 0$ tal que si $\|y - y_0\| < \epsilon$ hay $x \in \mathcal{U}$ con $f(x) = y$. En cualquier caso hay $x_1 \in X$ con $\|x_1\| \leqq M\|y - y_0\|$ y $f(x_1) = y - y_0$; si $x = x_0 + x_1$ tenemos $\|x - x_0\| \leqq M\|y - y_0\|$ y $f(x) = y$; si $\delta > 0$ es tal que $B_\delta(x_0) \subset \mathcal{U}$ podemos tomar $\epsilon = \frac{\delta}{M}$ y obtenemos lo deseado.

Falta ver que si f es abierta entonces f es sobreyectiva. Pero si $f(X)$ es abierto, contiene una bola $B_r(0)$, y si $y \in Y$, $\frac{r}{2\|y\|}y \in B_r(0)$ y hay $x \in X$ con $f(x) = \frac{r}{2\|y\|}y$, por lo que $f(\frac{2\|y\|}{r}x) = y$ y $y \in f(X)$, con lo que f es sobreyectiva.

Ejercicio 29. Si X, Y Banach, $f : X \to Y$ lineal, f continua sii $G = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.

La $g : G \to X$ dada por $g(x, f(x)) = x$ es lineal, biyectiva y continua. Si G cerrado, por aplicación abierta su inversa es continua y f es continua.

Ejercicio 30. Si $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ con X, Y Banach entonces f es inyectiva con imagen cerrada sii hay $C > 0$ con $\|f(x)\| \geqq C\|x\|$.

Si $f(X)$ es cerrado es de Banach, entonces $f : X \to f(X)$ es biyectiva y por lo tanto tiene inversa continua, lo cual implica lo pedido. Si $\|f(x)\| \geqq C\|x\|$, f es inyectiva y si $f(x_n) \to y$, x_n es de Cauchy, luego $x_n \to x$ y $y = f(x)$, por lo que $f(X)$ es cerrado.

Ejercicio 31. Si $1 \leqq p \leqq \infty$ y $(\alpha_{ij})_{ij}$ es tal que $(Ax)_i = \sum_j \alpha_{ij}x_j$ define un elemento Ax de ℓ^p para todo $x \in \ell^p$. Probar que $A \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^p)$.

Fijemos un i. Tenemos que $\sum_j \alpha_{ij}x_j$ existe para todo $x \in \ell^p$. Ahora si ponemos $f_n(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}x_j$, $f_n \in \mathcal{L}(\ell^p, \mathbb{R})$. Tenemos que para todo $x \in \ell^p$ vale que la secuencia $f_n(x)$ es convergente. Como ℓ^p es de Banach, por el teorema de acotación uniforme, $f(x) = \alpha_{ij}x_j$ está en $\mathcal{L}(\ell^p, \mathbb{R})$. Entonces $Ax = \sum_i f_i(x)e_i$ con $f_i \in \mathcal{L}(\ell^p, \mathbb{R})$. Hacemos el mismo truco: como $f_i(x)e_i \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^p)$, $\sum_{i=1}^n f_i(x)e_i$ también, convergen, luego por acotación uniforme hay $Ax = \sum_i f_i(x)e_i \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^p)$, listo.

Ejercicio 32. Si X es Banach, $X = S \oplus T$ con S, T subespacios cerrados entonces hay M con $\|x_s\| \leqq M\|x\|$ y $\|x_t\| \leqq M\|x\|$.

$f : S \times T \to X$ dada por $f(x_s, x_t) = x_s + x_t$ es lineal, continua y biyectiva; como S y T son cerrados, son Banach; luego f^{-1} es continua, lo cual implica lo pedido.

Ejercicio 33. Si X es Banach y $f : X \to X$ lineal tal que $f^2 = f$. Demostrar que f es continua sii $\ker f$ y $f(X)$ son cerrados. Demostrar que $X = \ker f \oplus f(X)$ y que $g : X \to X$ conmuta con f sii ambos espacios son g-invariantes.

Si f es continua $\ker f$ es trivialmente cerrado; si $f(x_n) \to y$, $f(f(x_n)) \to f(y)$ y $f(x_n) \to f(y)$, por lo que $f(X)$ es cerrado también. Si son cerrados, como $x = f(x) + (x - f(x))$ y por lo anterior, hay M con $\|f(x)\| \leqq \|x\|$.

Una implicación es obvia. Si $x \in \ker f$, $gf(x) = 0 = fg(x)$ porque $g(\ker f) \subset \ker f$. Si $x \in f(X)$, $x = f(y)$, $fg(x) = gf(x)$ sii $fgf(y) = gff(y)$ sii $fgf(y) = gf(y)$; ahora $gf(y) = f(z)$ porque $g(f(X)) \subset f(X)$; así que $fgf(y) = gf(y)$ sii $ff(z) = f(z)$, verdad.

Ejercicio 34. Sea H un espacio de Hilbert. Probar que si la sucesión $\langle x_n, y\rangle$ es de Cauchy para todo y entonces hay x tal que $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ para todo y.

Sea $f(y) = \text{lím}\langle y, x_n\rangle$. Se ve que es lineal. Para ver que es continua basta con ver que $\{\|x_n\|\}$ es acotado. Esto se ve por acotación uniforme, porque para todo y $\{\langle x_n, y\rangle\}$ es acotado. Ahora por el teorema de Riesz hay x con $f(y) = \langle y, x\rangle$. Listo.

Ejercicio 35. Sea $\| \, \|$ una norma en $C[0,1]$ que lo hace espacio de Banach y tal que si $f_n \to f$ con esa norma, entonces $f_n(t) \to f(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Demostrar que $\| \, \|$ es equivalente a $\| \, \|_\infty$.

Trivial: $\text{id} : C[0,1] \to C[0,1]$, donde el primero se toma con la norma $\| \, \|$ y el segundo con $\| \, \|_\infty$ es lineal, biyectiva y continua. Como los dos espacios son de Banach, la inversa es continua. Listo.

1.4 Espacios duales, Hahn-Banach y adjuntos

Ejercicio 36. Si X es un espacio normado, una completación es un espacio de Banach $\overline{X}$ que lo extiende tal que X es denso en $\overline{X}$. Todo espacio normado X tiene una completación $\overline{X}$ y si $\overline{X}, \overline{X}'$ son dos completaciones hay $\theta : \overline{X} \to \overline{X}'$ que es isometría lineal y tal que $\theta|_X = \mathrm{id}$. Probar que X^* y $\overline{X}^*$ son isomorfos (hay una isometría lineal entre ellos).

Sea A el conjunto de secuencias de Cauchy de X. Definimos una relación de equivalencia $\sim$ dada por $(x_n) \sim (y_n)$ sii $\|x_n - y_n\| \to 0$. Ponemos $\overline{X} = A/\sim$. Ponemos $[(a_n)] + [(b_n)] = [(a_n + b_n)]$, $\lambda[(a_n)] = [(\lambda a_n)]$ y $\|[(a_n)]\| = \lim \|a_n\|$. Hay que ver que es de Banach.

Sea $(a_n)_n$ de Cauchy, con $a_n = (a_{nm})_m$. Construyo una secuencia s_n de naturales (por el axioma de elección) tales que para cada n, para todo $k \geqq s_n$ vale $\|a_{ns_n} - a_{nk}\| < \frac{1}{n}$. Veamos que la diagonal a_{ns_n} es de Cauchy. Dado $\epsilon > 0$ sea c_0 tal que si $n, m \geqq c_0$ vale $\|a_n - a_m\| < \frac{\epsilon}{4}$. Sea $c_1 = \max\{c_0, \frac{4}{\epsilon}\}$. Sean $n, m \geqq c_1$. Sea c_2 tal que si $k \geqq c_2$ vale $|\|a_{nk} - a_{mk}\| - \|a_n - a_m\|| < \frac{\epsilon}{4}$. Vale también que $\|a_{nk} - a_{mk}\| \leqq \|a_n - a_m\| + |\|a_{nk} - a_{mk}\| - \|a_n - a_m\|| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$. Ahora si $k \geqq \max\{c_2, s_n, s_m\}$ vale $\|a_{ns_n} - a_{ms_m}\| \leqq \|a_{ns_n} - a_{nk}\| + \|a_{nk} - a_{mk}\| + \|a_{mk} - a_{ms_m}\| < \frac{1}{n} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{m} \leqq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$. Entonces recapitulando tenemos que si $n, m \geqq c_1$ vale $\|a_{ns_n} - a_{ms_m}\| < \epsilon$. Entonces listo, a_{ns_n} es de Cauchy. Mostremos que $a_n \to [(a_{ns_n})]$. Sea $\epsilon > 0$. Tenemos $\|a_n - [(a_{ns_n})]\| = \lim_m \|a_{nm} - a_{ms_m}\|$. Ahora $\|a_{nm} - a_{ms_m}\| \leqq \|a_{nm} - a_{nk}\| + \|a_{nk} - a_{mk}\| + \|a_{mk} - a_{ms_m}\|$. Con tomar $n \geqq \frac{4}{\epsilon}$, $m, k \geqq s_n$, n, m grandes para que $\|a_n - a_m\| < \frac{\epsilon}{4}$, k grande para que $|\|a_{nk} - a_{mk}\| - \|a_n - a_m\|| < \frac{\epsilon}{4}$, $m \geqq \frac{4}{\epsilon}$ y $k \geqq s_m$ obtenemos $\|a_{nm} - a_{ms_m}\| < \epsilon$. En particular $\lim_m \|a_{nm} - a_{ms_m}\| \leqq \epsilon$ y $\|a_n - [(a_{ns_n})]\| \leqq \epsilon$. Listo, el espacio es Banach.

Hay una inmersión de X en $\overline{X}$ dada por $\iota(x) = [(x)_n]$. Falta ver que $\iota(X)$ es denso en $\overline{X}$. Ahora si $x \in \overline{X}$, hay x_n secuencia en X con $x = [(x_n)]$. Veamos que $\iota(x_n) \to x$. Esto es que $[(x_n)_m] \to [(x_n)_n]$. Ahora $\|[(x_n)_m] - [(x_n)_n]\| = \lim_m \|x_n - x_m\| < \epsilon$ si n, m son grandes, listo.

Si $\overline{X}, \overline{X}'$ son dos completaciones definimos $\theta : \overline{X} \to \overline{X}'$ así: si $x \in X$ es $\lim x_n$, $\theta(x) = \lim x_n$. Veamos que está bien definida. Si $\lim x_n = x$ y $\lim y_n = x$, entonces $\lim z_n = x$, donde z_n es $x_{n/2}$ si n par y $y_{(n+1)/2}$ si n impar. Ahora z_n es Cauchy, así que $\lim z_n$ (en $\overline{X}'$) existe, y como x_n y y_n son subsecuencias, tienen el mismo límite, como queríamos. Hay que ver que es lineal, pero es trivial. Hay que ver que es una isometría, pero es obvio. Hay que ver que es sobreyectiva, pero obvio también. Que $\theta|_X$ también es obvio.

Falta probar que X^* y $\overline{X}^*$ son isomorfos. Defino $\theta : \overline{X}^* \to X^*$ por $\theta(f) = f|_X$. Es todo. Lo menos trivial quizás es mostrar que es sobreyectiva, y lo menos trivial es mostrar que la extensión es continua. Ahora si $f \in X^*$, hay M con $\|f(x)\| \leqq M\|x\|$. Sea $\tilde{f}$ la extensión dada por $\tilde{f}(x) = \lim f(x_n)$ donde $x_n \to x$. Si $x \in \overline{X}$ hay x_n con $\|x - x_n\| < \frac{1}{n}$. Ahora $\|\tilde{f}(x)\| = \|\lim f(x_n)\| = \lim \|f(x_n)\| \leqq M \lim \|x_n\| = M\|x\|$, listo.

Ejercicio 37. Si c_c es el espacio de las secuencias que son 0 salvo en finitos puntos con la norma supremo, mostrar que $c_c^* \cong \ell^1$, que $\overline{c_c} \cong c_0$, que $c_0^* \cong \ell^1$ y que $\ell^{p*} \cong \ell^{p'}$ para $1 \leqq p < \infty$.

Para $c_c^* \cong \ell^1$ ponemos $\theta : \ell^1 \to c_c^*$ dada por $\theta(a)(\sum_{n=1}^N u_n e_n) = \sum_{n=1}^N a_n u_n$. Se ve que si $a \in \ell^1$, $\theta(a)$ es lineal y $\|\theta(a)\| = \sup \frac{|\theta(a)(\sum_{n=1}^N u_n e_n)|}{\max\{|u_n|\}} = \sup \frac{|\sum_{n=1}^N a_n u_n|}{\max\{|u_n|\}} \leqq \sup \sum_{n=1}^N |a_n| \leqq \|a\|_{\ell^1}$. Considerando $\sum_{n=1}^N \frac{|a_n|}{a_n} e_n$ vemos $\|\theta(a)\| \geqq \sum_{n=1}^N |a_n|$ así que llevando N al límite vemos $\|\theta(a)\| \geqq \|a\|_{\ell^1}$, con lo que θ está bien definida y es una isometría. Es obviamente lineal, así que falta ver que es sobreyectiva. Pero si $f \in \mathcal{L}(c_c, k)$, $a_n = f(e_n)$, viendo $\sum_{n=1}^N \frac{|a_n|}{a_n} e_n$ y dado que $|f(x)| \leqq M\|x\|$, resulta $|f(\sum_{n=1}^N \frac{|a_n|}{a_n} e_n)| = \sum_{i=1}^N |a_n| \leqq M$, $a \in \ell^1$ y $\theta(a) = f$, listo.

Para $\overline{c_c} \cong c_0$ hay que ver que c_0 es completo y que c_c es denso en c_0. Ambas obvias.

Para $c_0^* \cong \ell^1$ basta combinar los dos isomorfismos anteriores.

Para $\ell^{p*} \cong \ell^{p'}$ ponemos $\theta : \ell^{p'} \to \ell^{p*}$ dada por $\theta(a)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. De nuevo todo igual.

Ejercicio 38. Probar que $\theta : \ell^1 \to \ell^{\infty *}$ dada por $\theta(a)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ es una inmersión isométrica pero no es sobreyectiva.

Lo no trivial es la no sobreyectividad. Pero defino $f : c \to k$ dada por $f(x) = \lim x_n$ y la extiendo por Hahn-Banach a una $\tilde{f} : \ell^\infty \to k$. No puede ser de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ porque a_n tendría que ser cero para todo n.

Ejercicio 39. Si X es normado y $x \in X$ hay $f \in X^*$ con $f(x) = \|x\|$ y $\|f\| = 1$.

Defino $f_0 \in \langle x \rangle^*$ como $f_0(\lambda x) = \lambda \|x\|$. Cumple $\|f_0\| = 1$. Por Hahn-Banach se extiende a f.

Ejercicio 40. Si X normado, $S \subset X$ subespacio cerrado y $x \notin S$, hay $f \in X^*$ con $f(x) = d(x, S)$, $f|_S = 0$ y $\|f\| = 1$.

Miro X/S con proyección π. El ejercicio anterior da $f_0 \in (X/S)^*$ tal que $f_0\pi(x) = d(x, E)$ y $\|f_0\| = 1$. Defino $f = f_0\pi$. Lo único no trivial es $\|f\| = 1$. Ahora como $\|f_0\| = 1$ para todo n hay x_n con $\|f_0\pi(x_n)\| \geqq (1 - \frac{1}{n})\|\pi(x_n)\|$. Ahora $\|\pi(x_n)\| = d(x_n, E)$. Esto quiere decir que hay $y \in E$ con $\|x_n - y\| \leqq \frac{d(x_n,E)}{1-\frac{1}{n}} = \frac{\|\pi(x_n)\|}{1-\frac{1}{n}}$. Entonces $\|\pi(x_n)\| \geqq (1 - \frac{1}{n})\|x_n - y\|$. Volviendo y poniendo $x_n - y$ en lugar de x_n tenemos $\|f_0\pi(x_n - y)\| \geqq (1 - \frac{1}{n})^2\|x_n - y\|$, es decir, $\|f\| \geqq (1 - \frac{1}{n})^2$. Con $n \to \infty$ obtenemos $\|f\| \geqq 1$. Que $\|f\| \leqq 1$ es trivial. Listo.

Ejercicio 41. Si X, Y son normados y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, definimos la *traspuesta* $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ dada por $T^*(f) = (x \mapsto fTx)$. Vale $\|T\| = \|T^*\|$.

Que $\|T^*\| \leqq \|T\|$ es trivial. Para todo n sea $x_n \in X$ con $\|x_n\| = 1$ y $\|Tx_n\| \geqq \|T\| - \frac{1}{n}$. Sea $f_n \in Y^*$ con $\|f_n\| = 1$ y $f_n(Tx_n) = \|Tx_n\|$. Tenemos $\|T^*\| \geqq \frac{\|T^*(f_n)\|}{\|f_n\|} = \|T^*(f_n)\| \geqq \frac{\|T^*(f_n)(x_n)\|}{\|x_n\|} = \|f_nT(x_n)\| = \|Tx_n\| \geqq \|T\| - \frac{1}{n}$. Entonces $\|T^*\| \geqq \|T\| - \frac{1}{n}$ para todo n y $\|T^*\| \geqq \|T\|$.

Ejercicio 42. Si X es normado y $S \subset X$ subespacio defino el *complemento* de S como $S^\perp = \{f \in X^* \mid f|_S = 0\}$.

a) Probar que $S^\perp$ es un subespacio cerrado de X^* y $\overline{S} = \{x \in X \mid (\forall f \in S^\perp) f(x) = 0\}$. $S^\perp = 0$ sii S es denso y $S^\perp = X^*$ sii S es trivial.

Lo primero es obvio. Si $x \in \overline{S}$ y $f \in S^\perp$, si $x_n \to x$ con $x_n \in S$, $f(x_n) \to f(x)$ muestra que $f(x) = 0$. Si $x \notin \overline{S}$, por un ejercicio anterior hay $f \in S^\perp$ con $f(x) \neq 0$ así que $x \notin \{x \in X \mid (\forall f \in S^\perp) f(x) = 0\}$.

b) Probar que $S^\perp \cong (X/\overline{S})^*$.

Sea $\theta : (X/\overline{S})^* \to S^\perp$ dado por $\theta(f) = f\pi$. Es lineal. Vale $\|\theta(f)\| \leqq \|f\|$. Sea $f \neq 0$. Para cada n hay $x_n \in X$ con $\frac{\|f\pi(x_n)\|}{\|\pi(x_n)\|} \geqq (1 - \frac{1}{n})\|f\|$, por definición de $\|f\|$. Sea $u \in \overline{S}$ con $\|x_n - u\| \leqq \frac{d(x_n,\overline{S})}{1-\frac{1}{n}}$. Tenemos $\frac{\|\pi(x_n-u)\|}{\|x_n-u\|} = \frac{d(x_n-u,\overline{S})}{\|x_n-u\|} = \frac{d(x_n,\overline{S})}{\|x_n-u\|} \geqq 1 - \frac{1}{n}$. Entonces $\frac{\|f\pi(x_n-u)\|}{\|x_n-u\|} =$

$\frac{\|f\pi(x_n-u)\|}{\|\pi(x_n-u)\|}\frac{\|\pi(x_n-u)\|}{\|x_n-u\|} = \frac{\|f\pi(x_n)\|}{\|\pi(x_n)\|}\frac{\|\pi(x_n-u)\|}{\|x_n-u\|} \geqq (1-\frac{1}{n})\|f\|(1-\frac{1}{n}) = (1-\frac{1}{n})^2\|f\|$. Entonces $\|f\pi\| = \sup_{x\in X}\frac{\|f\pi(x)\|}{\|x\|} \geqq (1-\frac{1}{n})^2\|f\|$ y, con $n\to\infty$, $\|f\pi\| \geqq \|f\|$. Conclusión: $\|\theta(f)\| = \|f\|$.

Faltaría mostrar que θ es sobreyectiva. Ahora si $f \in S^\perp$, defino $\tilde{f} \in (X/\overline{S})^*$ por $\tilde{f}(\pi(x)) = f(x)$. Es buena definición, $\tilde{f}$ resulta lineal y continuidad se ve porque si $\pi(x_n)\to 0$, $\|\pi(x_n)\|\to 0$, $d(x_n,\overline{S})\to 0$ así que hay $u_n\in\overline{S}$ con $\|x_n-u_n\|\to 0$, luego $x_n-u_n\to 0$, $f(x_n-u_n)\to 0$, $f(x_n)\to 0$ y $\tilde{f}(\pi(x_n))\to 0$. Listo.

c) Probar que $S^*\cong X^*/S^\perp$.

Sea $\theta: X^*/S^\perp\to S^*$ dada por $\theta(\pi(f)) = f|_S$. Está bien definida, es lineal y por Hahn-Banach es sobreyectiva. Falta probar $\|\theta(\pi(f))\| = \|\pi(f)\|$, o sea $\|f|_S\| = \|\pi(f)\|$. Una desigualdad es obvia: si $g\in S^\perp$, $\|f-g\|\geqq\|(f-g)|_S\| = \|f|_S\|$; tomando ínfimo resulta $\|\pi(f)\|\geqq\|f|_S\|$. Ahora si $f\in X^*$, extendamos $f|_S\in S^*$ a $\tilde{f}\in X^*$ por Hahn-Banach con $\|\tilde{f}\| = \|f|_S\|$; ahora $(f-\tilde{f})|_S = 0$, luego $f-\tilde{f}\in S^\perp$ y $\|f|_S\| = \|\tilde{f}\|\geqq\|\pi(\tilde{f})\| = \|\pi(f)\|$ y $\|f|_S\|\geqq\|\pi(f)\|$, listo.

Ejercicio 43. Si E es normado y $x\in E$ demostrar:

a) Para todo $f\in E^*$ vale $|f(x)| = \|f\|d(x,\ker f)$.

Sea B una base de $\ker f$. La extendemos a una base $B\cup B'$. Supongamos que $u,v\in B'$. Hay $a,b\in k$ con $af(u)+bf(v) = 0$, así que $f(au+bv) = 0$ y hay $w\in\ker f$ con $au+bv-w = 0$. Pero como son de la base tienen que ser iguales. Entonces $B' = \{u\}$. Tenemos

$$\|f\| = \sup_{a\in k^\times, w\in\ker f}\frac{|f(au+w)|}{\|au+w\|} = \sup_{w\in\ker f}\frac{|f(u)|}{\|u-w\|} = \frac{|f(u)|}{\inf\limits_{w\in\ker f}\|u-w\|} = \frac{|f(u)|}{d(u,\ker f)}.$$

Ahora $|f(x)| = |f(au+w)| = |a||f(u)| = |a|\|f\|d(u,\ker f) = \|f\|d(x,\ker f)$.

b) Si $S\subset E$ subespacio entonces $d(x,S) = \max\{|f(x)| \mid f\in S^\perp, \|f\|\leqq 1\}$.

Hay $f\in S^\perp$ con $\|f\| = 1$ y $f(x) = d(x,S)$. Falta ver que si $f\in S^\perp, \|f\|\leqq 1$ entonces $|f(x)|\leqq d(x,S)$. Ahora $|f(x)| = \|f\|d(x,\ker f)\leqq d(x,\ker f)\leqq d(x,S)$, porque $S\subset\ker f$. Listo.

Ejercicio 44. Si X es normado y $S\subset X$ es un subespacio cerrado de dimensión finita, hay un subespacio cerrado $T\subset X$ con $X = S\oplus T$.

Primero miramos el caso $S = \langle u\rangle$. Por Hahn-Banach, hay $f\in X^*$ con $f(u)\neq 0$. Veamos que $X = \langle u\rangle\oplus\ker f$. Si $v\in X$ y $f(v)\neq 0$, hay $a,b\in k$ con $af(u)+bf(v) = 0$, por lo que hay $w\in\ker f$ con $au+bv-w = 0$ y $v\in\langle u\rangle+\ker f$. Obvio $\langle u\rangle\cap\ker f = \varnothing$, así que $X = \langle u\rangle\oplus\ker f$. Como f es continua, $\ker f$ es cerrado, listo.

Ahora por inducción en la dimensión n de S. Para $n = 1$ está. Para $n+1$ y una base $\{u_1,\dots,u_{n+1}\}$, hay T_0 cerrado con $X = \langle u_{n+1}\rangle\oplus T_0$. Ahora para cada u_i con $1\leqq i\leqq n$ hay $v_i\in T_0$ con $u_i = a_iu_{n+1}+v_i$. Ahora se ve que $\{v_1,\dots,v_n,u_{n+1}\}$ es base de S. Ahora $\langle v_1,\dots,v_n\rangle\subset T_0$ es cerrado así que por hipótesis de inducción hay $T_1\subset T_0$ cerrado con $T_0 = \langle v_1,\dots,v_n\rangle\oplus T_1$. Volviendo tenemos $X = S\oplus T_1$, listo.

Ejercicio 45. Si X es *reflexivo* (esto quiere decir que $\theta: X\to X^{**}$ dada por $\theta(x)(f) = f(x)$ es sobreyectiva) y $S\subset X$ es un subespacio cerrado, también es reflexivo.

Hay que ver que si $\varphi \in S^{**}$ hay $x \in S$ con $\varphi(f) = f(x)$. Ahora definimos $\psi : X^* \to k$ dada por $\psi(f) = \varphi(f|_S)$. Es lineal. Para ver que es continua, sean $f_n \in X^*$ con $f_n \to 0$. Se ve que $\|f_n|_S\| \leqq \|f_n\|$ así que $f_n|_S \to 0$, luego $\varphi(f_n|_S) \to 0$ y $\psi(f_n) \to 0$. Entonces $\psi \in X^{**}$. Como X es reflexivo hay $x \in X$ con $\psi(f) = f(x)$. Si $x \in S$, veamos que si $f \in S^*$ entonces $\varphi(f) = f(x)$. Esto se da porque por Hahn-Banach hay $\tilde{f} \in X^*$ con $f = \tilde{f}|_S$ y $\varphi(f) = \varphi(\tilde{f}|_S) = \psi(\tilde{f}) = \tilde{f}(x) = f(x)$. Entonces en este caso estamos. Hay que ver que es imposible $x \notin S$. Ahora si $x \notin S$, como S es cerrado, por Hahn-Banach hay $f \in X^*$ con $f|_S = 0$ pero $f(x) \neq 0$. Tenemos $f(x) = \psi(f) = \varphi(f|_S) = \varphi(0) = 0$ y $f(x) = 0$, absurdo. Listo.

Ejercicio 46. Si X es normado y X^* es separable entonces X es separable.

Supongamos que X no es separable. Voy a mostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo conjunto A a lo sumo numerable hay x tal que $d(x, \overline{\langle A \rangle}) \geqq \epsilon$.

Por el absurdo. Supongamos que no existe. Entonces para todo n, tomando $\epsilon = \frac{1}{n}$, hay un conjunto numerable A_n tal que para todo x vale $d(x, \overline{\langle A_n \rangle}) < \frac{1}{n}$. Ahora, para cada n tomamos un A_n por el axioma de elección. Ahora para cada A_n tomamos B_n como el conjunto de todas las combinaciones lineales $\sum_{i \in I} a_i x_i$ con I finito, a_i racionales y $x_i \in A_n$. Se ve que B_n es numerable. Ahora $\overline{\langle A \rangle} = \overline{B_n}$. Entonces $B = \bigcup_n B_n$ es un denso numerable y X es separable.

Ahora sea ω_1 el menor ordinal no numerable. Por recursión transfinita defino F_α para todo $\alpha < \omega_1$ de manera que F_α es a lo sumo numerable. Pongo $F_\varnothing = \varnothing$. Si $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$, tengo que F_α es a lo sumo numerable por hipótesis, así que por lo que probé hay x_α con $d(x_\alpha, \overline{\langle F_\alpha \rangle}) \geqq \epsilon$, así que elijo uno (por axioma de elección) y pongo $F_\beta = F_\alpha \cup \{x_\alpha\}$. Si $\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \alpha$, pongo $F_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} F_\alpha$.

Para cada $\alpha < \omega_1$ pongo $f_\alpha \in X^*$ por Hahn-Banach tal que $f_\alpha|_{\overline{\langle F_\alpha \rangle}} = 0$, $f_\alpha(x_\alpha) = \|x_\alpha\|$. Ahora si $\alpha \neq \beta$, $\alpha < \beta$, $x_\alpha \in F_\beta$ y $f_\beta(x_\alpha) = 0$. Tenemos $\|f_\alpha - f_\beta\| \geqq \frac{|f_\alpha(x_\alpha) - f_\beta(x_\alpha)|}{\|x_\alpha\|} = \frac{|f_\alpha(x_\alpha)|}{\|x_\alpha\|} = 1$. Entonces para todo $\alpha, \beta \in \omega_1$ con $\alpha \neq \beta$ vale $\|f_\alpha - f_\beta\| \geqq 1$.

Supongamos que X^* fuera separable. Entonces habría A denso numerable. Podríamos tomar una función $\theta : \omega_1 \to A$ tal que $\|f_\alpha - \theta_\alpha\| < \frac{1}{2}$. Si θ fuera inyectiva A no sería numerable, así que hay $\alpha, \beta \in \omega_1$ distintos con $\theta_\alpha = \theta_\beta$. Pero tendríamos $\|f_\alpha - f_\beta\| \leqq \|f_\alpha - \theta_\alpha\| + \|\theta_\beta - f_\beta\| < 1$, contradiciendo $\|f_\alpha - f_\beta\| \geqq 1$. Listo.

Ejercicio 47. Probar que existe $L \in \ell^{\infty *}$ con $\|L\| = 1$ tal que si $x \in c$, $L(x) = \lim x_n$, si $T(c) = (x_2, x_3, \ldots)$ entonces $L(x) = L(T(x))$, y si x cumple que $x_n \geqq 0$ entonces $L(x) \geqq 0$.

Recordemos que vale el siguiente Hahn-Banach: si $S \subset X$ es subespacio, $f : S \to \mathbb{R}$ es lineal, $m : X \to \mathbb{R}$ es funcional de Minkowski (es decir, $m(x+y) \leqq m(x) + m(y)$ y $m(ax) = am(x)$ para $a \geqq 0$) y $f \leqq m$, hay $\tilde{f} : X \to k$ lineal con $\tilde{f}|_S = f$ y $\tilde{f} \leqq m$.

Sea $m(x) = \limsup x_n$. Es funcional de Minkowski. Defino L sobre $\{x - T(x) \mid x \in \ell^\infty\}$ como $L = 0$. Notar que $m(x) \geqq 0$ sobre ese subespacio, porque si $m(x) < 0$, hay n_0 con $\sup_{n \geqq n_0} (x_n - x_{n+1}) = \lambda < 0$, $x_n - x_{n+1} \leqq \lambda$, $x_{n+1} \geqq x_n - \lambda$, $x_N \geqq -N\lambda + c$ y $x_N \to +\infty$, imposible. Entonces $L \leqq m$ y puedo extender L a ℓ^∞. Notar que $\liminf x_n \leqq L(x) \leqq \limsup x_n$ así que salen las otras dos condiciones.

Falta ver que es continua! Hay que ver que $|L(x)| \leqq \sup_n |x_n|$, es decir, $\inf_n -|x_n| \leqq L(x) \leqq \sup_n |x_n|$. Ahora $L(x) \leqq \limsup x_n \leqq \sup_n x_n \leqq \sup_n |x_n|$, y lo mismo del otro lado.

1.5 Topologías débiles

1. Un EVT es un k-ev X con una topología que hace a $+$ y a $\cdot$ continuas.

2. Una seminorma hace EVT a un ev con la topología dada por la base $B(x, \epsilon)$, que queda Hausdorff sii la seminorma es norma.

> Recordar el criterio de candidato a base: que si A, B en la base y $x \in A \cap B$, hay C en la base con $x \in C \subset A \cap B$.

3. Esta topología es la misma que la inicial de las funciones $f_y(x) = \|x - y\|$.

> En la primera topología convergencia $x_\alpha \to x$ es $\|x_\alpha - x\| \to 0$, así que $f_y(x_\alpha) \to f_y(x)$ por desigualdad triangular. Si $x_\alpha \to x$ en la segunda, en particular $f_x(x_\alpha) \to f_x(x)$ y $\|x_\alpha - x\| \to 0$. Listo.

4. Si tenemos una familia de seminormas, la inicial formada por todas hace EVT al ev base y tiene como base a las intersecciones finitas de bolas de alguna de las seminormas. La convergencia es $x_\alpha \to x$ sii para toda seminorma vale $\|x_\alpha - x\| \to 0$. Es Hausdorff sii las seminormas separan puntos, o sea si $x \neq y$ hay una seminorma con $\|x - y\| \neq 0$. Notar que las seminormas pueden ser $|f|$, donde $f : X \to k$ es lineal y en ese caso la topología es la mínima que hace a las f y a las operaciones continuas.

5. Si X, Y son EVT dados por seminormas, $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ sii para cada norma de Y hay finitas normas de X y un M tales que $\|f(x)\| \leqq M \sum_{i=1}^{n} \|x\|_i$.

6. Si X es un EVT generado por seminormas $\{|f_i|\}_{i \in I}$ con $f_i : X \to k$ lineal, y $f \in \mathcal{L}(X, k)$, entonces f es combinación lineal de f_i. En particular, si la topología de X está dada por un subespacio de funcionales, las funcionales continuas son exactamente ésas.

> Por lo anterior hay $f_1, \ldots, f_n$ con $|f(x)| \leqq M \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|$. Entonces $\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \subset \ker f$. Por álgebra lineal, $T : X \to k^n$ dada por $T(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ cumple $\ker T \subset \ker f$, así que hay $\tilde{f} : k^n \to k$ lineal con $f = \tilde{f} \circ T$, y $f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$.

7. En un EVT, si $\mathcal{U}$ es un entorno convexo de 0, hay un abierto convexo $0 \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ con $\lambda \mathcal{V} = \mathcal{V}$ para todo $|\lambda| = 1$, lo cual se llama *balanceado*.

> El producto $\cdot : k \times X \to X$ es continuo, en particular $\cdot^{-1}(\mathcal{U})$ contiene un entorno de $(0, 0)$, que contiene un entorno de la forma $\{|\lambda| < \epsilon\} \times \mathcal{V}_0$, con $\mathcal{V}_0$ entorno abierto de 0. Ahora si $|\lambda| = 1$, $|\frac{\epsilon}{2}\lambda| < \epsilon$ y $\frac{\epsilon}{2}\lambda\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{U}$, así que si $\mathcal{V}_1 = \frac{\epsilon}{2}\mathcal{V}_0$, vale $\mathcal{V}_2 = \bigcup_{|\lambda|=1} \lambda\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{U}$. Sea $\mathcal{V}$ la cápsula convexa de $\mathcal{V}_2$. Es abierto, es convexo y balanceado. Como $\mathcal{U}$ es convexo y $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{U}$, como la cápsula convexa es el menor convexo que contiene a $\mathcal{V}_2$, vale $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, listo.

8. Si A es abierto convexo con $0 \in A$, y $m(x) = \text{ínf}\{s > 0 \mid s^{-1}x \in A\}$, m es una funcional de Minkowski y $A = \{x \in X \mid m(x) < 1\}$. Si A es balanceado, m es una seminorma.

> Primero, m está bien definida. Esto es que hay $s > 0$ con $s^{-1}x \in A$. Ahora $n^{-1}x \to 0$ implica que hay n con $n^{-1}x \in A$, porque A es entorno abierto de 0. Segundo, que $m(ax) = am(x)$ si $a \geqq 0$. Esto es obvio. Tercero, $m(x + y) \leqq m(x) + m(y)$. Para esto, si $s^{-1}x \in A$ y $t^{-1}y \in A$, $x \in sA$, $y \in tA$, $x + y \in sA + tA = (s + t)A$ (esta igualdad porque A es convexo) y $(s + t)^{-1}(x + y) \in A$, por lo que $m(x + y) \leqq s + t$; llevando s y t al ínfimo obtenemos $m(x + y) \leqq m(x) + m(y)$. Entonces m es funcional de Minkowski.
>
> Ahora, si $m(x) < 1$, hay $s < 1$ con $x \in sA \subset A$ (por convexidad) y $x \in A$. Si $x \in A$, $(1 - \frac{1}{n})^{-1}x \to x$ implica que $(1 - \frac{1}{n})^{-1}x \in A$ para algún n (por A abierto), $m(x) \leqq 1 - \frac{1}{n} < 1$ y $m(x) < 1$.
>
> Asumamos $\lambda A = A$ para todo $|\lambda| = 1$. Tenemos $m(ax) = m(\frac{a}{|a|}|a|x) = |a|m(\lambda x)$, con $\lambda = \frac{a}{|a|}$, $|\lambda| = 1$. Ahora $m(\lambda x) = \text{ínf}\{s > 0 \mid s^{-1}\lambda x \in A\} = \text{ínf}\{s > 0 \mid s^{-1}x \in \lambda^{-1}A\} = \text{ínf}\{s > 0 \mid s^{-1}x \in A\} = m(x)$ y $m(ax) = |a|m(x)$, con lo que m es seminorma. Listo.

9. Un EVT es *localmente convexo* sii el 0 tiene una base de entornos convexos. Por lo anterior podemos pedir entornos básicos convexos balanceados. Como bolas e intersecciones de bolas son convexos, todo EVT generado por una familia de seminormas es LC.

10. La topología de un EVTLC es la misma que la generada por las seminormas $m_i(x) = \inf\{s > 0 \mid s^{-1}x \in A_i\}$, donde $\{A_i\}_{i\in I}$ es una base de entornos convexos balanceados. Es Hausdorff sii las seminormas separan puntos sii $\bigcap_{i\in I} A_i = 0$.

Que las topologías coinciden es fácil. Lo otro también.

11. Un EVTLC es metrizable sii está generado por numerables seminormas que separan puntos.

Si es metrizable, $B(0, \frac{1}{n})$ es una base de entornos del 0; tomo convexos balanceados $\mathcal{U}_n \subset B(0, \frac{1}{n})$ y tengo una base numerable de entornos convexos balanceados del 0, que generan una familia de seminormas que definen la topología, y por tanto separan puntos. Si está generado por numerables seminormas que separan puntos, $d(x, y) = \sup\limits_n \frac{\min\{\|x-y\|_n, 1\}}{n}$ es una métrica y se ve que generan la misma topología. [Notar que podemos tomar que la métrica cumple $d(x, y) = d(x - y, 0)$ y $d(x + y, 0) \leqq d(x, 0) + d(y, 0)$. No podemos pedirle que se porte bien (como una norma) con la multiplicación, pero sí con la suma.]

12. Un *espacio de Frechet* es un EVTLC metrizable completo.

13. Vale el teorema de la función abierta sobre Frechet: si X, Y son Frechet, $f \in \mathcal{L}(X, Y)$, son equivalentes f es sobreyectiva, $f(X)$ es de segunda categoría y f es abierta. En particular si es biyectiva su inversa es continua. Vale gráfico cerrado: si $f : X \to Y$ lineal con $\{(x, f(x))\}$ cerrado es continua. Vale aplicación abierta: si $f_\alpha \in X^*$ tales que para todo $x \in X$ vale $\{|f_\alpha(x)|\}$ es acotado, entonces hay M y seminormas continuas $\|\cdot\|_1, \ldots, \|\cdot\|_n$ con $|f_\alpha(x)| \leqq M \sum_{i=1}^n \|x\|_i$ para todo x y todo α.

14. Dado X EVT definimos la *topología débil*, generada por las seminormas $\|x\|_f = |f(x)|$ para cada $f \in X^*$. Definimos la *topología débil** sobre X^* como la generada por las seminormas $\|f\|_x = |f(x)|$ para cada $x \in X$.

15. Hahn-Banach geométrico: Si U, V son convexos disjuntos en un EVT X, con U abierto, hay $\varphi \in X^*$ y $t \in \mathbb{R}$ con $\operatorname{Re}\varphi(x) < t \leqq \operatorname{Re}\varphi(y)$ para todo $x \in U, y \in V$.

Primero $k = \mathbb{R}$. Sean $x_0 \in U, y_0 \in V, z_0 = y_0 - x_0$ y $C = U - V + z_0$. C es abierto convexo y $0 \in C$. Sea $m(x) = \inf\{s > 0 \mid s^{-1}x \in C\}$. Como $z_0 \notin C$, $m(z_0) \geqq 1$. Definimos φ_0 en $\langle z_0\rangle$ por $\varphi_0(sz_0) = s$ y $\varphi_0 \leqq m$. Por Hahn-Banach podemos extender φ_0 a una φ con $\varphi \leqq m$; es claro que es continua. Ahora si $x \in U, y \in V$, $x - y + z_0 \in C$, $m(x - y + z_0) < 1$ y $\varphi(x - y + z_0) < 1$, por lo que $\varphi(x) < \varphi(y)$. Ahora $\varphi(U) \subset \mathbb{R}$ es convexo, luego un intervalo; sea t su endpoint; si hay $x \in U$ con $\varphi(x) = t$, como $(1 + \frac{1}{n})x \to x$, hay n con $(1 + \frac{1}{n})x \in U$, y $\varphi((1 + \frac{1}{n})x) = (1 + \frac{1}{n})t > t$, absurdo; luego $\varphi(x) < t \leqq \varphi(y)$ si $x \in U, y \in V$.

Ahora $k = \mathbb{C}$. Vemos X como $\mathbb{R}$-ev, las condiciones valen, luego hay $\varphi \in X^*$, $t \in \mathbb{R}$ con $\varphi(x) < t \leqq \varphi(y)$ para todo $x \in U, y \in V$. Pongo $\psi : X \to \mathbb{C}$ dada por $\psi(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$, es lineal, continua, y $\operatorname{Re}\psi(x) < t \leqq \operatorname{Re}\varphi(y)$ para todo $x \in U, y \in V$. Listo.

16. Hahn-Banach geométrico 2: Si X es EVTLCH, K convexo compacto, V convexo cerrado, $K \cap V = \varnothing$, entonces hay $\varphi \in X^*$ y $t \in \mathbb{R}$ con $\operatorname{Re} f(K) < t < \operatorname{Re} f(V)$.

$S = K - V$ es cerrado y $0 \notin S$. Entonces hay $\mathcal{U}$ abierto convexo balanceado, $0 \in \mathcal{U}, \mathcal{U} \cap S = \varnothing$. Ahora $\tilde{K} = K + \frac{1}{2}\mathcal{U}$ y $\tilde{V} = V + \frac{1}{2}\mathcal{U}$ son abiertos convexos con $\tilde{K} \cap \tilde{V} = \varnothing$. Hay φ que separa $\tilde{K}$ y $\tilde{V}$, luego a K y V.

17. Si X es EVTLCH y $x \in X$, $x \neq 0$, hay $f \in X^*$ con $f(x) \neq 0$. En particular X^* separa puntos.

18. Si K es cerrado convexo, es cerrado débil. En particular subespacio cerrado débil sii cerrado.

Si $x \notin K$, $\{x\}$ es convexo compacto, entonces hay $f \in X^*, t \in \mathbb{R}$ con $\operatorname{Re} f(x) < t < \operatorname{Re} f(K)$, y $\mathcal{U} = \{\operatorname{Re} f(x) < t\} \subset K^c$ es entorno de x en la topología débil, listo.

19. Hahn-Banach geométrico 3: Si X es EVT tal que X^* separa puntos, K y V convexos compactos y $K \cap V = \varnothing$, entonces hay $\varphi \in X^*$ y $t \in \mathbb{R}$ con $\operatorname{Re} f(K) < t < \operatorname{Re} f(V)$.

Compacto implica w-compacto, porque la topología débil es más fina. X es EVTLCH con la topología débil porque X^* separa puntos. Entonces estamos en las condiciones de HBG2, por lo que hay $\varphi \in X^*$ y $t \in \mathbb{R}$ con $\operatorname{Re} f(K) < t < \operatorname{Re} f(V)$ como queríamos; recordar que funcional lineal w-continua es continua.

20. Si X es EVTH y $S \subset X^*$ un subespacio, $(S^\perp)^\perp = \overline{S}^{w*}$, la w*-clausura. En particular, los subespacios w*-cerrados son los $E^\perp$, con $E \subset X$ subespacio.

Si $f \in \overline{S}^{w*}$, hay $f_\alpha \to f$ con $f_\alpha \in S$. Si $x \in S^\perp$, $f_\alpha(x) = 0$, $f(x) = 0$ y $f \in (S^\perp)^\perp$. Si $f \notin \overline{S}^{w*}$, como X^* es LCH con la topología débil*, hay un entorno $\mathcal{U}$ abierto convexo de f con $\mathcal{U} \subset X^* \setminus \overline{S}^{w*}$. Por el primer HB geométrico hay $x \in X, t \in \mathbb{R}$ con $\operatorname{Re} f(x) < t \leqq \operatorname{Re} \varphi(x)$ para todo $\varphi \in \overline{S}^{w*}$. Ahora como es un subespacio, $t = 0$, y si $\varphi(x) \geqq 0$, $-\varphi(x) \geqq 0$ y $\varphi(x) = 0$. Entonces x anula a todo $\overline{S}^{w*}$, luego a todo S, luego $x \in S^\perp$, pero $\operatorname{Re} f(x) < 0$ y $f \notin (S^\perp)^\perp$, como queríamos.

21. Si X normado de dim infinita entonces $\overline{\{\|x\| = 1\}}^w = \{\|x\| \leqq 1\}$, donde $\overline{\cdot}^w$ es la w-clausura, y $\{\|x\| \leqq 1\}$ tiene w-interior vacío.

Si $x \in \{\|x\| \leqq 1\}$ veamos que todo abierto contiene alguien de norma 1. Basta entornos básicos, o sea $\bigcap_{i=1}^n \{y \mid |f_i(x-y)| < \epsilon\}$. Ahora como la dimensión es finita, las intersección de los núcleos de finitas funcionales no puede ser trivial, luego hay $y \neq 0$ con $f_i(y) = 0$ para cada i. Ahora $x + ay$ está en el entorno para cada $a \geqq 0$. De $\|x + ay\| \geqq a\|y\| - \|x\|$ y de $\|x\| \leqq 1$ vemos por valores intermedios que hay a con $\|x + ay\| = 1$, listo. Ahora hay que ver que si $x \in \{\|x\| > 1\}$ hay un w-abierto que lo separa de $\{\|x\| = 1\|\}$. Ahora $\{x\}$ y $\{\|x\| \leqq 1\}$ cumplen las hipótesis de HBG2, luego hay $f \in X^*, t \in \mathbb{R}$ con $\operatorname{Re} f(x) < t < \operatorname{Re} f(y)$ para todo $\|y\| \leqq 1$. Entonces $\{\operatorname{Re} f < t\}$ es el entorno de x que buscamos, listo. El interior vacío es porque en cada abierto hay cosas de norma arbitrariamente grande.

22. Si X normado entonces X es separable sii $\{f \in X^* \mid \|f\| \leqq 1\}$ es w*-metrizable.

Si X es separable y $\{x_n\}$ es un denso numerable veamos que la métrica $d(f,g) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{\min\{|(f-g)(x_n)|,1\}}{n}$ da la topología w*. Si $f_\alpha \xrightarrow{w*} f$ veamos que $f_\alpha \xrightarrow{d} f$. Ahora si $\epsilon > 0$, para que $d(f_\alpha, f) < \epsilon$ basta que $|f_\alpha(x_n) - f(x_n)| < \epsilon$ para finitos n, lo cual sale tomando α grande por $f_\alpha \xrightarrow{w*} f$. Si $f_\alpha \xrightarrow{d} f$ veamos que $f_\alpha \xrightarrow{w*} f$. Dado x tenemos $|f_\alpha(x) - f(x)| \leqq |f_\alpha(x) - f_\alpha(x_n)| + |f_\alpha(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leqq \|f_\alpha\|\|x - x_n\| + |(f_\alpha - f)(x_n)| + \|f\|\|x_n - x\| \leqq nd(f_\alpha, f) + 2\|x_n - x\| < \epsilon$ si $\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{4}$ y α grande para que $d(f_\alpha, f) < \frac{\epsilon}{n}$, así que $f_\alpha(x) \to f(x)$, y cuantificando obtenemos $f_\alpha \xrightarrow{w*} f$. Listo.

Si $\{f \in X^* \mid \|f\| \leqq 1\}$ es w*-metrizable, tomemos una base numerable de entornos del 0, luego una base numerable de entornos básicos del 0, es decir de la forma $\bigcap_{i=1}^n \{|f(x_i)| < \epsilon\}$. Propongo que el conjunto de las combinaciones lineales de los x_i con coeficientes racionales forman un denso numerable. Notemos que la clausura de ese conjunto es un subespacio cerrado S de X. Si $x_0 \notin S$, por Hahn-Banach hay $f_0 \in X^*$ con $f_0|_S = 0$ pero $f_0(x_0) \neq 0$. Ahora $\{f \mid |f(x_0)| < |f_0(x_0)|\}$ es un w*-abierto, luego hay $\bigcap_{i=1}^n \{|f(x_i)| < \epsilon\} \subset \{f \mid |f(x_0)| < |f_0(x_0)|\}$, pero como $f_0(x_i) = 0$, f_0 está en el primero, pero no puede estar en el segundo, contradicción.

Ejercicio 48. Si X es normado entonces:

a) Si $x_n \overset{w}{\to} x$ entonces $\{x_n\}$ es acotado y $\|x\| \leqq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$. (Lo mismo vale en X^* con w*.)

Para cada f tenemos $\{|\mathrm{ev}_{x_n}(f)|\}$ es acotado. Luego por acotación uniforme, como X^* es Banach, hay M con $\|\mathrm{ev}_{x_n}\| \leqq M$, o sea $\|x_n\| \leqq M$, listo.

Ahora sea $\epsilon > 0$. Sea $f \in X^*$, $\|f\| = 1$ y $f(x) = \|x\|$, por Hahn-Banach, y n grande tal que $|f(x - x_k)| < \epsilon$ si $k \geqq n$. Tenemos $\|x\| - \|x_k\| = f(x) - f(x_k) + f(x_k) - \|x_k\| \leqq |f(x - x_k)| + \|f\|\|x_k\| - \|x_k\| < \epsilon$. Entonces $\|x\| < \|x_k\| + \epsilon$ si $k \geqq n$ y $\|x\| \leqq \inf_{k\geqq n} \|x_k\| + \epsilon \leqq \liminf_n \|x_n\| + \epsilon$. Hacemos $\epsilon \to 0$ y obtenemos $\|x\| \leqq \liminf_n \|x_n\|$, listo.

b) Si $x_n \overset{w}{\to} x$ y $f_n \to f$ en X^*, $f_n(x_n) \to f(x)$.

Como $x_n \overset{w}{\to} x$ hay M con $\|x_n\| \leqq M$. Tenemos $|f_n(x_n) - f(x)| \leqq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leqq \|f_n - f\|\|x_n\| + |f(x_n) - f(x)| < \epsilon$ si $\|f_n - f\| < \frac{\epsilon}{2M}$ y $|f(x_n) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$.

c) Si X es Banach, $x_n \to x$ y $f_n \overset{w*}{\to} f$, $f_n(x_n) \to f(x)$.

Como X Banach y para todo $x \in X$ vale $\{|f_n(x)|\}$ acotado, hay cota global: $\|f_n\| \leqq M$. Ahora $|f_n(x_n) - f(x)| \leqq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leqq \|f_n\|\|x_n - x\| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ si n es grande para que $\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2M}$ y $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Ejercicio 49. Si X es EVTH, un subespacio $S \subset X^*$ separa puntos sii es w*-denso.

Es trivial usando $(S^\perp)^\perp = \overline{S}^{w*}$.

Ejercicio 50. Si X es normado, $\iota : X \to X^{**}$ la inclusión $\iota(x) = \mathrm{ev}_x$, entonces $\iota(B_X(0,a))$ es w*-denso en $B_{X^{**}}(0,a)$ si $a > 0$.

Si no, hay $x_0 \in B_{X^{**}}(0,a)$ afuera de $\overline{\iota(B_X(0,a))}^{w*}$. Ahora $\{x_0\}$ y $\overline{\iota(B_X(0,a))}^{w*}$ son convexos, el primero compacto y el segundo cerrado, con intersección vacía. Entonces hay $\varphi : X^{**} \to k$ lineal continua y $t \in \mathbb{R}$ con $\operatorname{Re}\varphi(x) < t < \operatorname{Re}\varphi(x_0)$ para todo $x \in \iota(B_X(0,a))$. Ahora X^{**} con la topología débil* está generado por las seminormas $|\mathrm{ev}_f|$ con $f \in X^*$ que forman un ev, luego son todas las funcionales continuas, luego $\varphi = \mathrm{ev}_f$ con $f \in X^*$. Entonces $\operatorname{Re} f(x) < t < \operatorname{Re} x_0(f)$ para todo $x \in B_X(0,a)$. Ahora $\sup_{x\in B_X(0,a)} \operatorname{Re} f(x) = a\|f\|$, entonces $a\|f\| \leqq t < \operatorname{Re} x_0(f)$, pero $\operatorname{Re} x_0(f) \leqq |x_0(f)| \leqq \|x_0\|\|f\| < a\|f\|$, absurdo.

Ejercicio 51. Si X, Y normados, $T : X \to Y$ es lineal, continua y con inversa continua, y hay $x^{**} \in X^{**}, y \in Y$ con $T^{**}(x^{**}) = \mathrm{ev}_y$, $\|x^{**}\| < 1$, entonces hay $x \in X$ con $T(x) = y$ y $\|x\| < 1$.

Como $\|x^{**}\| < 1$, $\|x^{**}\| < 1-\delta$ para algún $\delta > 0$. Por lo anterior $\iota(B_X(0, 1-\delta))$ es w*-denso en $B_{X^{**}}(0, 1-\delta)$, luego hay una red x_α de X con $\mathrm{ev}_{x_\alpha} \overset{w*}{\to} x^{**}$ y $\|x_\alpha\| < 1-\delta$. Entonces si $\varphi \in X^*$, $\varphi(x_\alpha) \to x^{**}(\varphi)$. Si $\psi \in Y^*$, $T^*(\psi)(x_\alpha) \to x^{**}(T^*(\psi))$, y $\psi(T(x_\alpha)) \to T^{**}(x^{**})(\psi) = \psi(y)$. Entonces $T(x_\alpha) \overset{w}{\to} y$.

Supongamos que $y \notin \overline{T(B(0, 1-\delta))}$. Entonces $\{y\}$ y $\overline{T(B(0, 1-\delta))}$ son convexos, uno compacto y el otro cerrado, con intersección vacía, luego hay $\varphi \in Y^*$ con $\operatorname{Re}\varphi(y) < t < \operatorname{Re}\varphi(T(x))$ para todo $x \in X$, $\|x\| < 1-\delta$. Esto contradice $T(x_\alpha) \overset{w}{\to} y$. Entonces $y \in \overline{T(B(0, 1-\delta))}$. Así que hay otra red x_α con $T(x_\alpha) \to y$, $\|x_\alpha\| < 1-\delta$. Aplicamos T^{-1}, que se supone continua, y obtenemos $x_\alpha \to T^{-1}(y)$; aplicamos norma y obtenemos $\|x_\alpha\| \to \|T^{-1}(y)\|$, por lo que $\|T^{-1}(y)\| \leqq 1-\delta < 1$, como queríamos.

Ejercicio 52. Si X, Y Banach, $T : X \to Y$ es lineal, continua y sobreyectiva, y hay $x^{**} \in X^{**}, y \in Y$ con $T^{**}(x^{**}) = \mathrm{ev}_y$, $\|x^{**}\| < 1$, hay $x \in X$ con $T(x) = y$ y $\|x\| < 1$.

Hay $\tilde{T} : (X/\ker T) \to Y$ lineal, continua y biyectiva tal que $T = \tilde{T} \circ \pi$. Como X, Y son Banach, tiene inversa continua.

Definamos $\tilde{x}^{**} : (X/\ker T)^* \to k$ como $\tilde{x}^{**}(\varphi) = x^{**}(\varphi \circ \pi)$, donde $\pi : X \to X/\ker T$ es la proyección al cociente. Si $\varphi \in (X/\ker T)^*$, $\|\tilde{x}^{**}(\varphi)\| = \|x^{**}(\varphi \circ \pi)\| \leqq \|x^{**}\|\|\varphi \circ \pi\| \leqq \|x^{**}\|\|\varphi\|\|\pi\| = \|x^{**}\|\|\varphi\|$. Entonces $\tilde{x}^{**} \in (X/\ker T)^{**}$ y $\|\tilde{x}^{**}\| \leqq \|x^{**}\| < 1$. Veamos que $\tilde{T}^{**}(\tilde{x}^{**}) = \mathrm{ev}_y$. Dado $\varphi \in Y^*$ tenemos $\tilde{T}^{**}(\tilde{x}^{**})(\varphi) = \tilde{x}^{**}(\tilde{T}^*(\varphi)) = \tilde{x}^{**}(\varphi \circ \tilde{T}) = x^{**}(\varphi \circ \tilde{T} \circ \pi) = x^{**}(\varphi \circ T) = T^{**}(x^{**})(\varphi) = \mathrm{ev}_y(\varphi)$, como queríamos.

Entonces estamos en las condiciones del ejercicio anterior con $\tilde{T}$ y $\tilde{x}^{**}$. Así que hay $x_0 \in X$ con $\|\pi(x_0)\| < 1$ y $\tilde{T}(\pi(x_0)) = y$. Entonces $d(x_0, \ker T) < 1$ y $T(x_0) = y$. Hay $u \in \ker T$ con $\|x_0 - u\| < 1$, y $T(x_0 - u) = y$, por lo que $x = x_0 - u$ es como pide el enunciado. Listo.

Ejercicio 53. Si X, Y Banach, $f : X \to Y$, $g : Y^* \to X^*$ lineales y $g(\varphi) = \varphi \circ f$ para todo $\varphi \in Y^*$ entonces f y g son continuas.

Usamos el teorema del gráfico cerrado: si $x_\alpha \to x$ y $f(x_\alpha) \to y$, y $\varphi \in Y^*$, $\varphi \circ f = g(\varphi) \in X^*$ así que $\varphi(f(x_\alpha)) \to \varphi(f(x))$ y $\varphi(f(x_\alpha)) \to \varphi(y)$, por lo que $\varphi(f(x)) = \varphi(y)$. Si $f(x) \neq y$, hay $\varphi \in Y^*$ con $\varphi(f(x) - y) \neq 0$ por Hahn-Banach, contradicción. Entonces $y = f(x)$, como queríamos.

Ejercicio 54. Si X, Y Banach con $f : X \to Y$ lineal, entonces f es continua sii $f : (X, w) \to (Y, w)$ es continua.

Si es continua, sea $x_\alpha \xrightarrow{w} x$. Si $\psi \in Y^*$, $\psi \circ f \in X^*$ así que como $x_\alpha \xrightarrow{w} x$, $\psi(f(x_\alpha)) \to \psi(f(x))$. Entonces $f(x_\alpha) \xrightarrow{w} f(x)$, como queríamos.

Si $f : (X, w) \to (Y, w)$ es continua, veamos que para todo $\psi \in Y^*$ vale $\psi \circ f \in X^*$. Ahora si $x_\alpha \to x$, $x_\alpha \xrightarrow{w} x$, $f(x_\alpha) \xrightarrow{w} f(x)$ y $\psi(f(x_\alpha)) \to \psi(f(x))$, como queríamos. Queda por el ejercicio anterior.

Ejercicio 55. Si X, Y Banach con $g : Y^* \to X^*$ lineal, entonces $g : (Y^*, w^*) \to (X^*, w^*)$ es continua sii $g = f^*$, con $f : X \to Y$ continua.

Si $g : (Y^*, w^*) \to (X^*, w^*)$ es continua, miremos $g^* : (X^*, w^*)^* \to (Y^*, w^*)^*$ dada por $g^*(x^{**}) = x^{**} \circ g$. Ahora $(Y^*, w^*)^*$ es $\{\mathrm{ev}_y \mid y \in Y\}$, así que podemos definir $f : X \to Y$ por $g^*(\mathrm{ev}_x) = \mathrm{ev}_{f(x)}$; se ve que es lineal. Ahora $g(\psi)(x) = \mathrm{ev}_x(g(\psi)) = g^*(\mathrm{ev}_x)(\psi) = \mathrm{ev}_{f(x)}(\psi) = \psi(f(x))$, así que $g(\psi) = \psi \circ f$. Aplicamos el ejercicio anterior y $f : X \to Y$ continua, $g = f^*$.

Si $g = f^*$ con $f : X \to Y$ continua, supongamos $\psi_\alpha \xrightarrow{w*} \psi$ y veamos $g(\psi_\alpha) \xrightarrow{w*} g(\psi)$. Si $x \in X$, $g(\varphi)(x) = f^*(\varphi)(x) = \varphi(f(x))$, entonces $g(\psi_\alpha) \xrightarrow{w*} g(\psi)$ es $\psi_\alpha(f(x)) \to \psi(f(x))$ para todo $x \in X$, que vale porque $\psi_\alpha \xrightarrow{w*} \psi$. Listo.

Ejercicio 56. Un Banach X se dice *uniformemente convexo* si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$, $\|x\|, \|y\| \leqq 1$ y $\|\frac{1}{2}(x + y)\| > 1 - \delta$ entonces $\|x - y\| < \epsilon$.

0) Mostrar que la definición es equivalente a: $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall xy)(\|x\| = \|y\| = 1, \|\frac{1}{2}(x + y)\| > 1 - \delta \Rightarrow \|x - y\| < \epsilon)$, y a: si $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ con $\lim \|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\| = 1$ entonces $\lim \|x_n - y_n\| = 0$.

La que di implica la primera trivialmente, que a su vez implica la segunda trivialmente. Ahora supongamos que es falsa. Entonces hay $\epsilon > 0$ tal que para todo n hay x_n, y_n con $\|x_n\|, \|y_n\| = 1$, y $a_n, b_n \in [0,1]$ con $\|\frac{1}{2}(a_n x_n + b_n y_n)\| > 1 - \frac{1}{n}$ pero $\|a_n x_n - b_n y_n\| \geqq \epsilon$. Ahora $\|\frac{1}{2}(a_n x_n + b_n y_n)\| \leqq 1$ así que $\lim \|\frac{1}{2}(a_n x_n + b_n y_n)\| = 1$. Paso a una subsecuencia y a_n, b_n convergen a $a, b \in [0,1]$. Entonces $\lim \|\frac{1}{2}(a x_n + b y_n)\| = 1$. Ahora $\|\frac{1}{2}(a x_n + b y_n)\| \leqq \frac{a+b}{2}$, luego $2 \leqq a + b \leqq 2$ y $a = b = 1$, por lo que $\lim \|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\| = 1$ y $\lim \|x_n - y_n\| = 0$. Ahora $\|a_n x_n - b_n y_n\| = \|a_n x_n - b_n y_n\| - \|x_n - y_n\| + \|x_n - y_n\| \to 0$, contradicción con $\|a_n x_n - b_n y_n\| \geqq \epsilon$. Listo.

a) Mostrar que $x_n \to x$ sii $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$.

Si $\|x\| = 0$ está. Si no normalizamos. Como $\frac{1}{2}(x_n + x) \xrightarrow{w} x$, vale $1 = \|x\| \leqq \liminf \|\frac{1}{2}(x_n + x)\|$. Además $\liminf \|\frac{1}{2}(x_n + x)\| \leqq \limsup \|\frac{1}{2}(x_n + x)\| \leqq 1$ por desigualdad triangular. Entonces límite inferior y superior coinciden, $\lim \|\frac{1}{2}(x_n + x)\| = 1$ y $\lim \|x_n - x\| = 0$ por convexidad uniforme, listo.

b) Mostrar que si S es cerrado y convexo, tiene un elemento de norma mínima único.

Sea $M = \inf\{\|x\| \mid x \in S\}$. Si $M = 0$ es obvio. Si no, hay una sucesión x_n con $\|x_n\| \to M$. Veamos que es de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$. Veamos que hay n_0 tal que si $n, m \geqq n_0$ vale $\|x_n - x_m\| < \epsilon$. Tomemos $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{M+1}$ y δ_1 tal que si x, y con $\|x\|, \|y\| \leqq 1$ y $\|\frac{1}{2}(x+y)\| > 1 - \delta_1$ entonces $\|x - y\| < \epsilon_1$. Ahora tomemos $\delta < \min\{\frac{M\delta_1}{1-\delta_1}, 1\}$ y n_0 tal que $M \leqq \|x_n\|, \|x_m\| \leqq M + \delta$ si $n, m \geqq n_0$. Basta ver que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$. Ahora $x = \frac{x_n}{M+\delta}, y = \frac{x_m}{M+\delta}$ cumplen $\|\frac{1}{2}(x+y)\| \geqq \frac{M}{M+\delta} > \frac{1}{1 + \frac{\delta_1}{1-\delta_1}} = 1 - \delta_1$. Entonces $\|x - y\| < \epsilon_1$, o sea $\|x_n - x_m\| < \epsilon_1(M + \delta) < \epsilon_1(M+1) = \epsilon$, como queríamos. Entonces x_n es de Cauchy y hay x con $x_n \to x$. Como S es cerrado, $x \in S$, y $\|x\| = M$. Veamos que es el único. Si $y \in S$, $\|y\| = M$, $1 \leqq \|\frac{1}{2}(\frac{1}{M}x + \frac{1}{M}y)\| \leqq 1$, luego $\frac{1}{M}x = \frac{1}{M}y$ por convexidad uniforme y $x = y$, listo.

c) Mostrar que X es reflexivo.

Sea $z \in X^{**}$, $\|z\| = 1$ y sea $\epsilon > 0$. Hay $f \in X^{***}$ con $\|f\| = 1$ y $f(z) = 1$ (H-B). Ahora $\iota(B_{X^*}(0,1))$ es w*-densa en $\overline{B_{X^{***}}(0,1)}$ así que hay $\varphi_\alpha \in B_{X^*}(0,1)$ con $\mathrm{ev}_{\varphi_\alpha} \xrightarrow{w*} f$. En particular $z(\varphi_\alpha) \to f(z) = 1$. Sea $\delta > 0$ tal que si $\|x\|, \|y\| \leqq 1$ y $\|\frac{1}{2}(x+y)\| > 1 - \delta$ entonces $\|x - y\| < \epsilon$. Podemos conseguir $\varphi \in X^*$ con $\|\varphi\| < 1$ y $|z(\varphi) - 1| < \frac{\delta}{2}$.

Sea $C = \{x \in B(0,1) \mid \varphi(x) > 1 - \delta\}$. Se ve que es convexo. Notar que si $x, y \in C$, $\|\frac{1}{2}(x+y)\| > \varphi(\frac{1}{2}(x+y)) > 1 - \delta$ y $\|x - y\| < \epsilon$.

Hay $x_\alpha \in X$ con $\|x_\alpha\| < 1$ y $\mathrm{ev}_{x_\alpha} \xrightarrow{w*} z$, por lo que $\varphi(x_\alpha) \to z(\varphi)$ y hay α_0 con $|\varphi(x_\alpha) - z(\varphi)| < \frac{\delta}{2}$ y $|\varphi(x_\alpha) - 1| < \delta$ si $\alpha \geqq \alpha_0$. Entonces hay una red de $\iota(C)$ que w*-tiende a z, por lo que $z \in \overline{\iota(C)}^{w*}$.

Sea $x \in C$. Sean $x_\alpha \in C$ con $\mathrm{ev}_{x_\alpha} \xrightarrow{w*} z$. Tenemos $\mathrm{ev}_x - \mathrm{ev}_{x_\alpha} \xrightarrow{w*} \mathrm{ev}_x - z$. Sea $\psi_0 \in X^{***}$ con $\|\psi_0\| = 1$ y $\psi_0(\mathrm{ev}_x - z) = \|\mathrm{ev}_x - z\|$. Sea $\psi \in X^*$ con $\|\psi\| < 1$ y $|\mathrm{ev}_\psi(\mathrm{ev}_x - z) - \psi_0(\mathrm{ev}_x - z)| < \epsilon$. Entonces $\psi(x) - z(\psi) \geqq \|\mathrm{ev}_x - z\| - \epsilon$. Ahora como $\mathrm{ev}_x - \mathrm{ev}_{x_\alpha} \xrightarrow{w*} \mathrm{ev}_x - z$, sigue que $\psi(x - x_\alpha) \to \psi(x) - z(\psi)$. Ahora $\psi(x - x_\alpha) < \|x - x_\alpha\| < \epsilon$, y tomando límite $\psi(x) - z(\psi) \leqq \epsilon$. Luego $\|\mathrm{ev}_x - z\| - \epsilon \leqq \epsilon$ y $\|\mathrm{ev}_x - z\| \leqq 2\epsilon$.

Entonces para todo $\epsilon > 0$ hay $x \in X$ con $\|\mathrm{ev}_x - z\| \leqq \epsilon$. Armamos una sucesión x_n con $\|\mathrm{ev}_{x_n} - z\| < \frac{1}{n}$, es de Cauchy, luego converge a $x \in X$ que va a tener que cumplir $\mathrm{ev}_x = z$. Listo.

Ejercicio 57. Si X, Y Banach, X reflexivo, y $T : Y \to X^*$ isometría de Y a un w*-denso en X^*, entonces $T(Y) = X^*$, Y es reflexivo y $Y^* = T^*(\iota(X))$.

Sea $\varphi \in X^*$. Si $\varphi \notin \overline{T(Y)}$, hay $x \in X$ que separa φ de $T(Y)$, absurdo porque $T(Y)$ se supone w*-denso en X^*. Entonces para todo n hay $y_n \in Y$ con $\|\varphi - T(y_n)\| < \frac{1}{n}$. Entonces y_n es de Cauchy y hay $y \in Y$ con $y_n \to y$, por lo que $T(y_n) \to T(y)$ y $\varphi = T(y)$. Esto prueba $T(Y) = X^*$. Lo otro sale.

Ejercicio 58. Si X es σ-finito, $L^1(X)^* \cong L^\infty$.

Definimos $T : L^\infty \to L^{1*}$ dado por $T(f)(g) = \int fg$. Es lineal, $\|T(f)\| \leqq \|f\|$, y poniendo $g = \mathbb{1}_{|f| > \|f\| - \epsilon}$ se ve que $\|T(f)\| \geqq \|f\|$. Basta probar que es sobreyectiva entonces. Sea $\varphi \in L^1(X)^*$.

Tomemos primero $\mu(X) < \infty$. Definimos $\nu(E) = \varphi(\mathbb{1}_E)$ para E medible. Es una medida con signo absolutamente continua, entonces por Radon-Nikodym hay f medible con $\nu(E) = \int f \mathbb{1}_E$. Se ve que $|f| \leqq \|\varphi\|$ salvo en un conjunto nulo, por lo que $f \in L^\infty$. Esto es porque si no, $f \geqq \|\varphi\| + \epsilon$ en E con $\mu(E) \neq 0$ y tendríamos $\int f \mathbb{1}_E = \varphi(1_E) \leqq \|\varphi\| \mu(E)$ pero $\int f \mathbb{1}_E \geqq (\|\varphi\| + \epsilon)\mu(E)$, absurdo. Basta ver que si $g \in L^1$ entonces $\varphi(g) = \int fg$. Ahora las simples son densas en L^1, así que basta verlo para ellas via convergencia dominada, pero ahí es obvio por linealidad.

Ahora veamos $\mu(X) = \infty$. Ponemos $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$, con $X_n \subset X_{n+1}$ finitos. Para cada n hay f_n medible, $\|f_n\|_{L^\infty} \leqq \|\varphi\|$, $f_n = 0$ fuera de X_n, con $\varphi(g) = \int f_n g$ para toda $g \in L^1$ con $g = 0$ fuera de X_n. Tenemos que f_n y f_m, $n < m$, coinciden sobre X_n a.e. Tomemos $f = \overline{\lim} f_n$. Es medible y $\|f\|_{L^\infty} \leqq \|\varphi\|$. Tenemos $f|_{X_n} = f_n$ a.e. Falta ver que si $g \in L^1$ entonces $\varphi(g) = \int fg$. De nuevo basta verlo para simples y por linealidad para $g = \mathbb{1}_E$, E medible de medida finita, pero de nuevo sale por convergencia dominada partiendo por los X_n.

Ejercicio 59. En ℓ^1, $f_n \overset{w}{\to} f$ sii $f_n \to f$.

Recordemos que los $\varphi \in (\ell^1)^*$ se pueden representar como $\varphi(f) = \sum_{k=1}^\infty g(k) f(k)$ con $g \in \ell^\infty$. Supongamos que $f_n \overset{w}{\to} f$ pero no $f_n \to f$. Tenemos que, pasando a una subsucesión, hay $\epsilon > 0$ tal que $\|f_n - f\| \geqq \epsilon$, o sea $\sum_{k=1}^\infty |f_n(k) - f(k)| \geqq \epsilon$.

La idea es, pasando a una subsucesión, encontrar $a(n)$ tal que $\sum_{k=a(n)}^{a(n+1)-1} |f_n(k) - f(k)|$ concentra la norma; digamos $\sum_{k=a(n)}^{a(n+1)-1} |f_n(k) - f(k)| \geqq \|f_n - f\| - o(1)$. De esa manera si ponemos $g(k)$ dado por $\operatorname{sgn}(f_n(k) - f(k))$ con n elegido para los $k \in [a(n), a(n+1))$ tenemos que $|\varphi(f_n - f)|$ no tiende a cero, porque $\|g\| = 1$ y $|\varphi(f_n - f)| = \left| \sum_{k=a(n)}^{a(n+1)-1} |f_n(k) - f(k)| + \sum_{k \notin [a(n), a(n+1))} g(k)(f_n(k) - f(k)) \right| \geqq \sum_{k=a(n)}^{a(n+1)-1} |f_n(k) - f(k)| - \sum_{k \notin [a(n), a(n+1))} |f_n(k) - f(k)| = \|f_n - f\| - o(1) \geqq \epsilon - o(1)$.

Si tenemos que $\sum_{k=a(n)}^\infty |f_n(k) - f(k)|$ concentra la norma, encontrar $a(n+1)$ se puede. Entonces bastaría mostrar que dado a y n_0 siempre hay $n \geqq n_0$ tal que $\sum_{k=a}^\infty |f_n(k) - f(k)|$ concentra la norma. Ahora $\sum_{k=1}^{a-1} |f_n(k) - f(k)|$ tiende a cero, porque es suma finita de sucesiones que tienden a cero, que son $|f_n(k) - f(k)|$ con k fijo; éstas tienden a cero viendo w-convergencia sobre $\varphi(f) = f_n(k)$. Entonces $\sum_{k=a(n)}^\infty |f_n(k) - f(k)| - \|f_n - f\|$ se puede tomar arbitrariamente chico. Bueno, listo.

Ejercicio 60. Si $1 < p < \infty$, X es σ-finito, entonces $L^p(X)$ es reflexivo y $L^p(X)^* = L^q(X)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $p \geqq 2$, $L^p(X)$ es uniformemente convexo.

Primero hay que probar que L^p es uniformemente convexo si $p \geqq 2$.

Para eso probamos la siguiente desigualdad: $|s+t|^p + |s-t|^p \leqq 2^{p-1}(|s|^p + |t|^p)$, válida para todos los reales s, t. Notar que es invariante por $s \mapsto -s$, $t \mapsto -t$ y $(s,t) \mapsto (t,s)$, por lo que podemos tomar $s \geqq t \geqq 0$, y queda $(s+t)^p + (s-t)^p \leqq 2^{p-1}(s^p + t^p)$. Notar que es homogénea, por lo que podemos tomar $t = 1$, por lo cual es $f(s) = (s+1)^p + (s-1)^p - 2^{p-1}(s^p+1) \leqq 0$ para todo $s \geqq 1$. Tenemos $f''(s) = p(p-1)((s+1)^{p-2} + (s-1)^{p-2} - 2(2s)^{p-2}) \leqq 0$, porque $s+1 \leqq 2s$, $s-1 < 2s$ y $(s+1)^{p-2} \leqq (2s)^{p-2}$, $(s-1)^{p-2} \leqq (2s)^{p-2}$. Ahora $f'(s) = p((s+1)^{p-1} + (s-1)^{p-1} - (2s)^{p-1})$ y $f'(1) = 0$, por lo que $f' \leqq 0$, f es decreciente y $f(s) \leqq f(1) = 0$, como queríamos.

Ahora si $\|f\|, \|g\| \leqq 1$ y $\|\frac{1}{2}(f+g)\| < 1-\delta$, con la desigualdad obtenemos $\|f-g\| < 2(1-(1-\delta)^p)^{1/p}$, listo.

Ahora lo terminamos usando el ejercicio anterior con $T : L^q \to L^{p*}$ dado por $T(f)(g) = \int fg$. Hay que ver que $\|T(f)\| = \|f\|$. La desigualdad $\|T(f)\| \leqq \|f\|$ es obvia. Para la otra ponemos $g = \|f\|^{-\frac{q}{p}} \frac{|f|^q}{f}$. Tenemos $\|g\|_{L^p} = (\int |\|f\|^{-\frac{q}{p}} \frac{|f|^q}{f}|^p)^{1/p} = \|f\|^{-\frac{q}{p}} (\int |f|^{(q-1)p})^{1/p} = \|f\|^{-\frac{q}{p}} \|f\|^{\frac{q}{p}} = 1$. Y tenemos $T(f)(g) = \int fg = \|f\|^{-\frac{q}{p}} \int f \frac{|f|^q}{f} = \|f\|^{-\frac{q}{p}} \|f\|^q = \|f\|$, listo. Ahora hay que ver que $T(L^q)$ es w*-denso en L^p. Basta ver que separa puntos. Si $f, g \in L^p$ son distintas, hay $E \subset X$, $0 < \mu(E) < \infty$ (lo segundo por σ-finitud) con $\int_E (f-g) \neq 0$. Entonces $T(\mathbb{1}_E)$ separa. Listo.

1.6 Banach-Alaoglu, Krein-Milman y teoremas de punto fijo

1. (Alaoglu) Si X normado, $B^* = \{f \in X^* \mid \|f\| \leqq 1\}$ es w*-compacto.

La restricción a $B = \overline{B}(0,1)$ mete a B^* en D^B, donde $D = \{x \in \mathbb{F} \mid |x| \leqq 1\}$, con la topología producto, de manera homeomorfa (eso es la topología débil*). Ahora B^* se ve que es cerrado en D^B, y D^B es compacto por Tychonoff, así que B^* es compacto, listo.

2. Un *conjunto extremal* de un convexo K es un subconjunto $F \subset K$ tal que si $\lambda x+(1-\lambda)y \in K$ con $0 < \lambda < 1$ entonces $x, y \in F$. Un *punto extremal* de K es un punto $x \in K$ tal que $\{x\}$ es un conjunto extremal. Llamemos $\operatorname{ext} K$ al conjunto de puntos extremales y $\operatorname{co}(X)$ a la cápsula convexa de X.

3. (Krein-Milman) Si X es EVT, X^* separa puntos, K es convexo compacto entonces $K = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{ext} K)$.

Primero que $\operatorname{ext} K \neq \varnothing$. Por Zorn sobre la inclusión al revés entre los conjuntos extremales cerrados no vacíos hay un maximal M. Si M tiene dos puntos, sea $\varphi \in X^*$ que los separe. Sea $m_\varphi = \max\{\operatorname{Re}\varphi(x) \mid x \in M\}$ y $M_\varphi = \{x \in M \mid \operatorname{Re}\varphi(x) = m_\varphi\} \neq \varnothing$ es un conjunto extremal de M, por lo tanto de K (si $x, y \in K$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in M_\varphi \subset M$, $x, y \in M$ y $x, y \in M_\varphi$), y por maximalidad es F. Entonces $\operatorname{Re}\varphi$ es constante; hago lo mismo con $\operatorname{Im}\varphi$ y obtengo contradicción. Entonces $M = \{x\}$ y $x \in \operatorname{ext} K$.

Ahora $C = \overline{\operatorname{co}(\operatorname{ext} K)} \subset K$ es compacto convexo. Si $x_0 \in K$ no está, por HBG3 hay $\varphi \in X^*$ con $\max\{\operatorname{Re}\varphi(x) \mid x \in C\} < \operatorname{Re}\varphi(x_0)$. Entonces si $m = \max\{\operatorname{Re}\varphi(x) \mid x \in K\}$ y $M = \{x \in X \mid \operatorname{Re}\varphi(x) = m\}$, $M \cap C = \varnothing$; ahora M es extremal compacto y por lo anterior hay x_1 extremal de M y extremal de K, luego $x_1 \in C$, absurdo.

4. Sea X es EVTLCH, K es convexo compacto, $F \subset K$ con $K = \overline{\operatorname{co}}(F)$, entonces $\operatorname{ext} K \subset \overline{F}$.

Basta probarlo para F cerrado. Sea $a \in \operatorname{ext} K$ con $a \notin F$. Hay una seminorma $\|\ \|$ con $F \cap \{x \mid \|x-a\| < 1\} = \varnothing$. Sea $\mathcal{U} = \{x \mid \|x\| < \frac{1}{3}\}$. Se tiene $(a+\mathcal{U}) \cap (F+\mathcal{U}) = \varnothing$. Hay finitos $x_1, \ldots, x_n$ con $F \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i+\mathcal{U})$ por compacidad. Sea $K_i = \overline{\operatorname{co}}(F \cap (x_i+\mathcal{U}))$; entonces $K_i \subset x_i+\overline{\mathcal{U}}$ y $K_i \subset K$; como los K_i con convexos compactos vale $\overline{\operatorname{co}}(\bigcup_{i=1}^n K_i) = \operatorname{co}(\bigcup_{i=1}^n K_i)$. Entonces a es combinación convexa de tipos de K_i; entonces a está en algún K_i y $a \in \overline{F+\mathcal{U}}$, absurdo.

5. (Markov-Kakutani) Si X es un EVT, $K \neq \varnothing$ un convexo compacto y $\mathcal{F}$ una familia abeliana de transformaciones afines continuas $K \to K$, entonces hay $x_0 \in K$ con $T(x_0) = x_0$ para toda $T \in \mathcal{F}$.

Si $T \in \mathcal{F}$ defino $T^{(n)} : K \to K$ como $T^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k$. Si $S, T \in \mathcal{F}$ vale $S^{(n)}T^{(m)} = T^{(m)}S^{(n)}$. Por propiedad de intersección finita $\bigcap_{\substack{T\in\mathcal{F}\\ n\geqq 1}} T^{(n)}(K)$ es no vacío, porque $T_1^{(n_1)} \ldots T_p^{(n_p)}(K) \subset T_i^{(n_i)}(K)$ para cada i. Sea $x_0 \in \bigcap_{\substack{T\in\mathcal{F}\\ n\geqq 1}} T^{(n)}(K)$. Si $T \in \mathcal{F}, n \geqq 1$, hay $x \in K$ con $x_0 = T^{(n)}(x)$; entonces $Tx_0 - x_0 = \frac{1}{n}(Tx + \cdots + T^n x) - \frac{1}{n}(x + \cdots + T^{n-1}x) = \frac{1}{n}(T^n x - x) \in \frac{1}{n}(K-K)$. Por compacidad $T(x_0) = x_0$, listo.

6. (Hahn-Banach invariante) Si X espacio normado, Y subespacio, $f \in Y^*$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(X,X)$ tal que $T(Y) \subset Y$, $ST = TS$ y $f \circ T = f$ si $S, T \in \mathcal{F}$, entonces hay $\tilde{f} \in X^*$ con $\tilde{f}|_Y = f$, $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ y $\tilde{f} \circ T = \tilde{f}$ para todo $T \in \mathcal{F}$.

Asumo $\|f\| = 1$ wlog. Pongo $K = \{\varphi \in X^* \mid \|\varphi\| \leqq 1, \varphi|_Y = f\}$, no vacío (HB), convexo y w*-compacto (Alaoglu). Si $T \in \mathcal{F}$, $\tilde{T} : K \to K$ dada por $\tilde{T}(\varphi) = \varphi \circ T$ es afín w*-w* continua. Las $\tilde{T}$ cumplen las condiciones de Markov-Kakutani, así que hay $\tilde{f} \in K$ con $\tilde{f} \circ T = \tilde{f}$, listo.

7. Lema. Si X es EVTLCH, $K \subset X$ w-compacto convexo y separable, $\| \ \|$ seminorma, $\epsilon > 0$, entonces hay $C \subset K$ cerrado convexo tal que $C \neq K$ y $\operatorname{diam}(K \setminus C) = \sup_{x,y \in K \setminus C} \|x - y\| < \epsilon$.

Sea $B = \{x \in X \mid \|x\| \leqq \frac{\epsilon}{4}\}$. Como K es separable, hay $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}}(B + a_n)$. Sea $E = \overline{\operatorname{ext} K}^w$. Vale $E \subset K$, así que es w-compacto y $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}(E \cap (B + a_n))$. Por Baire sobre E (vale porque es w-compacto Hausdorff) hay $n \in \mathbb{N}$ tal que $E \cap (B + a_n)$ tiene w-interior no vacío, o sea hay W w-abierto con $\varnothing \neq W \cap E \subset E \cap (B + y_i)$. Sean $K_1 = \overline{\operatorname{co}}^w(E \setminus W)$ y $K_2 = \overline{\operatorname{co}}^w(E \cap W)$. Por Krein-Milman $K = \overline{\operatorname{co}}^w(K_1 \cup K_2)$ y por w-compacidad $= \operatorname{co}(K_1 \cup K_2)$. Afirmo que $K_1 \neq K$ (si $K = \overline{\operatorname{co}}^w(E \setminus W)$, $\operatorname{ext} K \subset \overline{E \setminus W}^w = E \setminus W$, absurdo). Afirmo que $\operatorname{diam}(K_2) \leqq \frac{\epsilon}{2}$ (obvio).

Sea $F : K_1 \times K_2 \times [0,1] \to K$ dado por $F(x_1, x_2, t) = tx_1 + (1-t)x_2$. F es continua y suryectiva. Defino $C_r = F(K_1 \times K_2 \times [r, 1])$, que es w-compacto convexo. Afirmo $C_r \neq K$ si $r > 0$ (si $C_r = K$, $e \in \operatorname{ext} K$, $e = tx_1 + (1-t)x_2$, $e = x_1$, $\operatorname{ext} K \subset K_1$ y $K = K_1$, absurdo). Terminamos si encontramos r con $\operatorname{diam}(K \setminus C_r) < \epsilon$. Si $x, y \in K \setminus C_r$, $x = tx_1 + (1-t)x_2$, $y = t'y_1 + (1-t')y_2$ con $t, t' \in [0, r)$. Tenemos $\|x - x_2\| = \|tx_1 + (1-t)x_2 - x_2\| = t\|x_1 - x_2\| \leqq t\operatorname{diam}(K) \leqq rD$, e igual $\|y - y_2\| \leqq rD$. Ahora $\|x - y\| \leqq \|x - x_2\| + \|x_2 - y_2\| + \|y - y_2\| \leqq 2rD + \operatorname{diam}(K_2) < \epsilon$ si $r < \frac{\epsilon}{4D}$, listo.

8. **(Ryll-Nardzewski)** Si X es un EVTLCH, $K \neq \varnothing$ convexo w-compacto, $\mathcal{F}$ un semigrupo de t afines $K \to K$ w-continuas no contractivo (viz si $x, y \in K$, $x \neq y$ entonces $0 \notin \overline{\{T(x) - T(y) \mid T \in \mathcal{F}\}}$), entonces hay un $x_0 \in K$ con $T(x_0) = x_0$ para toda $T \in \mathcal{F}$.

Basta verlo para $\mathcal{F}$ finito, por propiedad de intersección finita. Sean $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{F}$ y $\tilde{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n T_i$; por Markov-Kakutani hay x_0 con $\tilde{T}(x_0) = x_0$. Supongamos que hay T_i con $T_i(x_0) \neq x_0$; podemos asumir que para todos vale $T_i(x_0) \neq x_0$ (si para $T_1, \ldots, T_r$ vale y para $T_{r+1}, \ldots, T_n$ no, formamos $\tilde{T}' = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r T_i$ y es una cuenta ver que $\tilde{T}'(x_0) = x_0$). Tomamos $\mathcal{S}$ como el subgrupo generado por los T_i; es numerable. Entonces $K = \overline{\operatorname{co}}\{T(x_0) \mid T \in \mathcal{S}\}$ es separable w-compacto convexo. Como $\mathcal{F}$ es no contractiva, hay una seminorma $\| \ \|$ y un $\epsilon > 0$ con $(\forall T \in \mathcal{F})\|T(T_i x_0) - T(x_0)\| \geqq \epsilon$ para todo $i \in [1, n]$. Usamos el lema anterior sobre K, $\| \ \|$, ϵ y obtenemos $C \subset K$ cerrado convexo con $C \neq K$ y $\operatorname{diam}(K \setminus C) < \epsilon$. Entonces hay $S \in \mathcal{S}$ con $S(x_0) \in K \setminus C$. Tenemos $S(x_0) = S\tilde{T}(x_0) = S(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n T_i x_0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n S(T_i x_0) \in K \setminus C$; como C es convexo, algún término está en $K \setminus C$, es decir, hay T_i con $S(T_i x_0) \in K \setminus C$; pero entonces $S(x_0)$ y $S(T_i x_0) \in K \setminus C$, y $\|S(T_i x_0) - S(x_0)\| < \epsilon$, contradiciendo que $(\forall T \in \mathcal{F})\|T(T_i x_0) - T(x_0)\| \geqq \epsilon$ para todo $i \in [1, n]$. Listo.

Ejercicio 61. Probar que todo Banach X es isométrico a un subespacio cerrado de $C(K)$, con K compacto Hausdorff.

Que K sea $B^* = \{f \in X^* \mid \|f\| \leqq 1\}$ con la topología débil* y la isometría sea $\theta : X \to C(B^*)$ dada por $\theta(x) = \mathrm{ev}_x$. Claramente $\theta(x) \in C(B^*)$, θ es lineal, $\|\theta(x)\| = \sup_{f\in B^*} |f(x)| = \|x\|$ por HB, así que $\theta : X \to \theta(X)$ es isometría. Bastaría ver que $\theta(X)$ es cerrado. Pero sí: si $\theta(x_n) \to \varphi$, si $\epsilon > 0$ vale $\sup_{f\in B^*} |f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$ si $n, m \geqq n_0$, luego $\|x_n - x_m\| < \epsilon$, (x_n) es de Cauchy, converge a x y listo.

Ejercicio 62. Sea X Banach reflexivo. Probar que.

a) Para todo $\varphi \in X^*$ hay $x \in X$ con $\varphi(x) = \|\varphi\|\|x\|$.

Por HB hay $f \in X^{**}$ con $\|f\| = 1$ y $f(\varphi) = \|\varphi\|$. Como X reflexivo, $f = \mathrm{ev}_x$ y listo.

b) Para todo subespacio cerrado S y $x \in X$ hay $y \in S$ con $\|x - y\| = d(x, S)$.

Sea $d = d(x, S)$. Sea y_α una red con $\|x - y_\alpha\| \to d$. Tenemos $\|y_\alpha\| \leqq \|x\| + d + 1 = M$ si $\alpha \geqq \alpha_0$. Como X es reflexivo, $\overline{B}(0, M)$ es w-compacto. Entonces hay una subred convergente: $y_\alpha \overset{w}{\to} y$. Como S es cerrado, es w-cerrado y $y \in S$. Tenemos $x - y_\alpha \overset{w}{\to} x - y$. Sea $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y $f(x - y) = \|x - y\|$ (existe por HB). Tenemos $f(x - y_\alpha) \to f(x - y) = \|x - y\|$. Dado $\epsilon > 0$, si $\alpha \geqq \alpha_0$ vale $f(x - y_\alpha) \geqq \|x - y\| - \epsilon$; a la vez $f(x - y_\alpha) \leqq \|x - y_\alpha\| \leqq d + \epsilon$; entonces $d + \epsilon \geqq \|x - y\| - \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$; en el límite obtenemos $d \geqq \|x - y\|$; ahora $d \leqq \|x - y\|$ y $d = \|x - y\|$, como queríamos.

Ejercicio 63. Si X Banach es separable o reflexivo entonces toda sucesión acotada en X^* tiene una subsucesión w*-convergente.

Primero si es separable. Pero la topología débil* es metrizable, así que Alaoglu y listo.

Ahora si es reflexivo. Sea φ_n la sucesión. Sea $S = \overline{\langle \varphi_n \rangle}$ con la topología de la norma, que es separable. Como X reflexivo, S reflexivo. La sucesión metida en S^{**} tiene una subsucesión φ_{n_k} w*-convergente a $\varphi \in S$ por lo anterior, lo cual quiere decir que para todo $f \in S^*$ vale $f(\varphi_{n_k}) \to f(\varphi)$. Ahora sea $x \in X$. Tenemos $\mathrm{ev}_x \in S^*$, luego $\varphi_{n_k}(x) \to \varphi(x)$ y $\varphi_{n_k} \overset{w*}{\to} \varphi$, como queríamos.

Ejercicio 64. Si X es Banach de dim infinita separable o reflexivo entonces existe $\varphi_n \in X^*$ con $\|\varphi_n\| = 1$ tal que $\varphi_n \overset{w*}{\to} 0$.

Si X es separable, X^* con la top* es metrizable. Entonces hay una base numerable de entornos de 0. En cada uno hay alguien de norma 1 por dimensión infinita, listo.

Si X es reflexivo, sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vectores li y $S = \overline{\langle x_n \rangle}$ es separable, por lo que (extendiendo con HB) hay $\varphi_n \in X^*$ con $\|\varphi_n|_S\| = 1$ y $\varphi_n(x) \to 0$ si $x \in S$. Ahora por lo anterior pasando a una subsucesión tenemos $\varphi_n \overset{w*}{\to} \varphi$, con $\varphi \in X^*$. Se ve $\varphi|_S = 0$. Entonces $\psi_n = \varphi_n - \varphi$ cumple $\psi_n \overset{w*}{\to} 0$ y $\|\psi_n\| \geqq 1$, porque $\psi_n|_S = \varphi_n|_S$. Entonces $\frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}$ cumple lo pedido.

Ejercicio 65. Si $S \subset X$ es un subespacio cerrado de un Banach separable y $T : S \to c_0$ lineal acotada, entonces hay una extensión continua $\tilde{T} : X \to c_0$ con $\|\tilde{T}\| \leqq 2\|T\|$.

$T = (\varphi_n(x))_n$, con $\varphi_n \in S^*$, $\|T\| = \sup \|\varphi_n\|$, $\varphi_n \overset{w*}{\to} 0$. La idea sería encontrar $\tilde{\varphi}_n \in X^*$ con $\tilde{\varphi}_n|_S = \varphi_n$, con $\tilde{\varphi}_n \overset{w*}{\to} 0$ y $\|\tilde{\varphi}_n\| \leqq 2\|\varphi_n\|$.

Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un denso numerable de X.

Sea $\pi : X \to X/S$ la proyección a X/S.

Voy a construir una secuencia $s_k \in S$. Pongo $s_1 = 0$. Si $\pi(x_{k+1}) \notin \langle \pi(x_1), \ldots, \pi(x_k)\rangle$ entonces pongo $s_{k+1} = 0$. Si $\pi(x_{k+1}) \in \langle \pi(x_1), \ldots, \pi(x_k)\rangle$ entonces hay $a_i \in \mathbb{F}$ con $\pi(x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} a_i\pi(x_i)$ y pongo $s_{k+1} = \sum_{i=1}^{k}(a_i x_i + s_i) - x_{k+1}$.

Dado n tomo por HB una extensión $\tilde{\varphi}_n \in X^*$ de φ_n con $\|\tilde{\varphi}_n\| = \|\varphi_n\|$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ voy a definir una función lineal $\psi_k : \langle \pi(x_1), \ldots, \pi(x_k)\rangle \to \mathbb{F}$ de manera que para cada $i \in [1, k]$ vale $\psi_k(\pi(x_i)) = \tilde{\varphi}_n(x_i) + \varphi_n(s_i)$. Empiezo con ψ_1 dada por $\psi_1(\pi(x_i)) = \tilde{\varphi}_n(x_1) + \varphi_n(s_1)$. Luego dada ψ_k defino ψ_{k+1} así. Si $\pi(x_{k+1}) \notin \langle \pi(x_1), \ldots, \pi(x_k)\rangle$ extiendo ψ_{k+1} poniendo $\psi_{k+1}(\pi(x_{k+1})) = \tilde{\varphi}_n(x_{k+1}) + \varphi_n(s_{k+1})$ y listo. Si $\pi(x_{k+1}) \in \langle \pi(x_1), \ldots, \pi(x_k)\rangle$, $\psi_{k+1} = \psi_k$ y hay que comprobar que $\psi_{k+1}(\pi(x_{k+1})) = \tilde{\varphi}_n(x_{k+1}) + \varphi_n(s_{k+1})$. Ahora si $\pi(x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} a_i\pi(x_i)$, $\psi_{k+1}(\sum_{i=1}^{k} a_i\pi(x_i)) = \sum_{i=1}^{k} a_i\psi_{k+1}(\pi(x_i)) = \sum_{i=1}^{k} a_i(\tilde{\varphi}_n(x_i) + \varphi_n(s_i)) = \tilde{\varphi}_n(\sum_{i=1}^{k}(a_i x_i + s_i)) = \tilde{\varphi}_n(x_{k+1} + s_{k+1}) = \tilde{\varphi}_n(x_{k+1}) + \varphi_n(s_{k+1})$, como queríamos.

Ahora extiendo ψ_n a $\psi'_n \in (X/S)^*$ y defino $\tilde{\psi}_n = \tilde{\varphi}_n - \psi'_n \circ \pi$. Tengo $\tilde{\psi}_n|_S = \varphi_n$ y $\tilde{\psi}_n(x_k) = \varphi_n(s_k)$ para $k \in [1, n]$. Entonces $\tilde{\psi}_n \overset{w*}{\to} 0$.

Ejercicio 66. (Martingalas) Sea $\mathcal{F}_n \nearrow \mathcal{F}$ una sucesión creciente de σ-álgebras sobre un conjunto X, μ una $\mathcal{F}$-medida y $\mu_n = \mu|_{\mathcal{F}_n}$. Para cada n hay una variable aleatoria $\mathcal{F}_n$-medible X_n de manera que $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$. Si $p > 1$ y $\mathbb{E}|X_n|^p$ es acotado entonces hay X con $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$.

La condición dice que para todo $S \in \mathcal{F}_n$ vale $\mathbb{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_S) = \mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_S)$. Para cada $S \in \mathcal{F}$ vale que $\mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_S)$ es eventualmente constante, igual a $\mathbb{E}(X_k\mathbb{1}_S)$ tal que $S \in \mathcal{F}_k$. Tenemos que $L^p(X)$ es reflexivo. Entonces X_n tiene una subsecuencia w-convergente $X_{n_k} \overset{w}{\to} X$. En particular para todo $S \in \mathcal{F}$ vale $\mathbb{E}(X_{n_k}\mathbb{1}_S) \to \mathbb{E}(X\mathbb{1}_S)$, o sea que $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_S) = \mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_S)$ para todo $S \in \mathcal{F}_n$ y $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$, como queríamos.

Ejercicio 67. Si X es compacto Hausdorff y $\mathcal{P}(X)$ es el espacio de las medidas de probabilidad (por Riesz subconjunto de $C(X)^*$ de las μ positivas con $\mu(1) = 1$), es convexo w*-compacto y sus extremos son las medidas de Dirac $\delta_x(f) = f(x)$.

La bola unitaria cerrada en $\mathcal{M}(X)$ (como $C(X)^*$) es w*-compacta y $\mathcal{P}(X)$ es un subconjunto cerrado convexo.

Sea μ extremal. Supongamos que hay A boreliano con $0 < \mu(A) < 1$. Entonces $\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c) = \mu(A)\frac{1}{\mu(A)}\mu(E \cap A) + (1 - \mu(A))\frac{1}{\mu(X\cap A^c)}\mu(E \cap A^c)$, así que $\mu(E) = \frac{1}{\mu(A)}\mu(E\cap A)$ y $\mu(A) = 1$, absurdo. Entonces para todo boreliano A vale $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$. Supongamos que para todo $x \in C$ vale $\mu(x) = 0$. Entonces por regularidad hay abierto $\mathcal{U}_x$ con $x \in \mathcal{U}_x$ y $\mu(\mathcal{U}_x) = 0$. Por compacidad se puede cubrir X con finitos de esos abiertos, así que $\mu(X) = 0$, absurdo. Entonces hay $x \in X$ con $\mu(x) = 1$, listo. Recíprocamente si $\mu(x) = 1$ y $\mu = \lambda\nu_1 + (1 - \lambda)\nu_2$, evaluamos en $\{x\}$ y listo, son δ_x tb.

Ejercicio 68. (Banach-Stone) Si X, Y son compactos Hausdorff y hay una isometría $\theta : C(X) \to C(Y)$ entonces X e Y son homeomorfos.

Es obvio que $\xi : C(X)^* \to C(Y)^*$ dada por $\xi(\varphi) = \varphi \circ \theta^{-1}$ es una isometría. Entonces hay una isometría $\xi : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$. Creo que se ve que los extremales de $\mathcal{M}_1(X) = \overline{B}_{\mathcal{M}(X)}(0, 1)$ son los $c\delta_x$, $|c| = 1$. Tenemos que $\xi|_{\mathcal{M}_1(X)} : \mathcal{M}_1(X) \to \mathcal{M}_1(Y)$ manda extremales en extremales, así que dado $x \in X$ hay $f(y) \in Y$ con $\xi(\delta_x) = c\delta_{f(x)}$ con $|c| = 1$. La

$f : X \to Y$ es biyectiva. Veamos que es continua y con eso terminamos. Si $x_\alpha \to x$, tenemos $\delta_{x_\alpha} \overset{w*}{\to} \delta_x$, y luego (es casi obvio) $\xi(\delta_{x_\alpha}) \overset{w*}{\to} \xi(\delta_x)$ así que $c_\alpha \delta_{f(x_\alpha)} \overset{w*}{\to} c\delta_{f(x)}$. Supongamos que no $f(x_\alpha) \to f(x)$. Entonces pasando a una subred hay un entorno $\mathcal{U}$ de $f(x)$ con $f(x_\alpha) \notin \mathcal{U}$ para todo α. Por compacidad de Y pasando a una subred tenemos $f(x_\alpha) \to y$ y $c_\alpha \to c'$. Entonces $c_\alpha \delta_{f(x_\alpha)} \overset{w*}{\to} c'\delta_y$ y por Hausdorff vale $c'\delta_y = c\delta_{f(x)}$, por lo que $y = f(x)$ y en $\mathcal{U}$ hay algún x_α, listo.

Ejercicio 69. (Bikhoff-Von Neumann) Las matrices cuadradas de números no negativos tales que los números de las filas y los números de las columnas suman 1 son combinaciones convexas de matrices de permutación.

Krein-Milman y compacidad y dimensión finita dan que basta ver que los únicos extremales son las permutaciones. Entonces hay que ver que si A tiene ij con $0 < A_{ij} < 1$ entonces se puede descomponer convexamente. Dado ij hay ik con $0 < A_{ik} < 1$ y lj con $0 < A_{lj} < 1$; pongo $f(ij) = ik$ y $g(ij) = lj$. Dado ij con $0 < A_{ij} < 1$ tomo la secuencia $ij, f(ij), gf(ij), fgf(ij), gfgf(ij), \ldots$. Por finitud hay un ciclo ahí adentro, así que puedo tomar que $ij, f(ij), \ldots, f^\epsilon(fg)^k(ij)$ es un ciclo simple, con $\epsilon \in \{0, 1\}$. Si $\epsilon = 1$ saco el último y lo meto donde está ij. Sea δ el mínimo de A_{uv}, con uv sobre el ciclo. Entonces a los de posiciones pares les sumo δ y a los otros $-\delta$, y sigo teniendo una matriz doblemente estocástica B. También si le sumo $-\delta$ a las pares y δ a las impares obtengo una matriz ds C, y tengo $A = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$. Listo. Que las permutaciones son extremales es obvio.

Ejercicio 70. Decimos que $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica discreta si $f(m,n) = \frac{1}{4}(f(m, n+1) + f(m+1, n) + f(m, n-1) + f(m-1, n))$. Demostrar que toda función armónica discreta acotada es constante.

Sea K el conjunto de las funciones armónicas discretas $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^2)$ con $\|f\| \leqq 1$. Tenemos $\ell^\infty(\mathbb{Z}^2) = \ell^1(\mathbb{Z}^2)^*$, así que K es convexo w*-compacto y Krein-Milman dice que $K = \overline{\mathrm{co}}(\operatorname{ext} K)$. Supongamos que $f \in K$ es extremal. Tenemos $f(m,n) = \frac{1}{4}(f(m, n+1) + f(m+1, n) + f(m, n-1) + f(m-1, n))$, así que por ser extremal vale $f(m,n) = f(m, n+1) = f(m+1, n)$ y f es constante. Listo.

Ejercicio 71. Sea X compacto Hausdorff con $T : X \to X$ continua.

a) Sea $\mathcal{P}_T(X)$ el conjunto de las $\mu \in \mathcal{P}(X)$ T-invariantes, o sea $\mu(f) = \mu(f \circ T)$, o sea $\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$. Probar que $\mathcal{P}_T(X) \neq \varnothing$.

Primero hay que probar que $\mu(f) = \mu(f \circ T)$ sii $\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$. Si $\mu(f) = \mu(f \circ T)$ hay que sacar de acá $\mu(\mathbb{1}_E) = \mu(\mathbb{1}_E \circ T) = \mu(\mathbb{1}_{T^{-1}(E)})$. Aproximamos 1_E por $f_\alpha \in C(X)$ puntualmente por Urysohn y $f_\alpha \circ T \to \mathbb{1}_E \circ T$ también, listo. Si $\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$ entonces $\mu(\mathbb{1}_E) = \mu(\mathbb{1}_E \circ T)$, aproximamos f puntualmente por simples y listo.

Ahora sea $T : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ dado por $T(\mu)(f) = \mu(f \circ T)$. Veamos que es bien definida, w*-w* continua y afín. Hay que ver que $T(\mu) \in \mathcal{P}(X)$; ahora $T(\mu) \geqq 0$ es obvio y $T(\mu)(\mathbb{1}) = \mu(\mathbb{1} \circ T) = \mu(\mathbb{1}) = 1$, listo. Que es w*-w* continua es obvio: si $\mu_\alpha \overset{w*}{\to} \mu$ y $f \in \mathbb{C}(X)$, $T(\mu_\alpha)(f) = \mu_\alpha(f \circ T) \to \mu(f \circ T) = T(\mu)(f)$ y $T(\mu_\alpha) \overset{w*}{\to} T(\mu)$. Que es afín es obvio: $T(\sum_i \lambda_i \mu_i)(f) = (\sum_i \lambda_i \mu_i)(f \circ T) = \sum_i \lambda_i \mu_i(f \circ T) = \sum_i \lambda_i T(\mu_i)(f)$. Entonces como $\mathcal{P}(X)$ es w*-compacto convexo, por Markov-Kakutani hay μ con $T(\mu) = \mu$ o sea $\mu(f) = \mu(f \circ T)$. Entonces $\mathcal{P}_T(X) = \{\mu \in \mathcal{P}(X) \mid T(\mu) = \mu\} \neq \varnothing$, como queríamos.

b) Supongamos que T es biyectiva. Una $\mu \in \mathcal{P}_T(X)$ se dice *ergódica* sii $\mu(A \bigtriangleup T(A)) = 0$ implica $\mu(A)$ es 0 o 1. Probar que hay medidas ergódicas.

$\mathcal{P}_T(X)$ es convexo w*-cerrado (cuenta), luego w*-compacto, luego por Krein-Milman tiene extremales. Sea μ extremal. Supongamos que A cumple $\mu(A \triangle T(A)) = 0$ y $0 < \mu(A) < 1$. Sean $\mu_1(E) = \frac{1}{\mu(A)}\mu(E \cap A)$ y $\mu_2(E) = \frac{1}{\mu(A^c)}\mu(E \cap A^c)$. Veamos que $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}_T$. Ahora $\mu(A)\mu_1(T^{-1}(E)) = \mu(T^{-1}(E) \cap A) = \mu(T^{-1}(E) \cap T^{-1}(T(A))) = \mu(T^{-1}(E \cap T(A))) = \mu(E \cap T(A)) = \mu(E \cap A) = \mu(A)\mu_1(E)$, porque A es igual a $T(A)$ salvo un conjunto nulo; igual con μ_2. Ahora $\mu = \mu(A)\mu_1 + (1 - \mu(A))\mu_2$, absurdo. Entonces μ es ergódica, listo.

Ejercicio 72. Si G es un grupo abeliano, hay $\mu : 2^G \to [0, 1]$ tal que $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$ si $E \cap F = \varnothing$, $\mu(E + a) = \mu(E)$ si $a \in G$ y $\mu(G) = 1$.

Es aplicar Hahn-Banach invariante a $X = \ell^\infty(G)$, $Y = \langle \mathbb{1}_G \rangle$, $f(a\mathbb{1}_G) = a$, y la familia de operadores $T_a(g(x)) = g(x - a)$. Se obtiene $\tilde{f} \in \ell^\infty(G)^*$ con $\|\tilde{f}\| = 1$, $\tilde{f}(1_G) = 1$ y $\tilde{f}(T(g)) = \tilde{f}(g)$. Ponemos $\mu(E) = \tilde{f}(\mathbb{1}_E)$ y tenemos: $\mu(G) = 1$, $|\mu(E)| \leqq 1$, $\mu(E \cup F) = \tilde{f}(\mathbb{1}_{E\cup F}) = \tilde{f}(\mathbb{1}_E + \mathbb{1}_F) = \tilde{f}(\mathbb{1}_E) + \tilde{f}(\mathbb{1}_F) = \mu(E) + \mu(F)$ si $E \cap F = \varnothing$, luego $1 = \mu(E) + \mu(E^c) \leqq \mu(E) + 1$ y $\mu(E) \in [0, 1]$, y $\mu(E + a) = \tilde{f}(\mathbb{1}_{E+a}) = \tilde{f}(T_a(\mathbb{1}_E)) = \tilde{f}(\mathbb{1}_E) = \mu(E)$. Listo.

Ejercicio 73. Si G es un grupo compacto, hay una única medida de Haar, esto es, una medida positiva boreliana en G con $\mu(G) = 1$, $\mu(U) > 0$ si U abierto y $\mu(E) = \mu(aE) = \mu(Ea) = \mu(E^{-1})$ si $a \in G, E \in \mathcal{B}$.

Por Riesz hay que encontrar $I \in C(G)^*$ positivo tal que $I(\mathbb{1}_G) = 1$, $I(\mathbb{1}_U) > 0$ si U abierto, y $I = T_a(I) = T^a(I) = T_{-1}(I)$, donde $T_a, T^a, T_{-1} : C(X)^* \to C(G)^*$ son isometrías dadas por $T_a(\varphi)(f(x)) = \varphi(f(ax))$, $T^a(\varphi)(f(x)) = \varphi(f(xa))$ y $T_{-1}(\varphi)(f(x)) = \varphi(f(x^{-1}))$. Sea $K = \{\varphi \in C(G)^* \mid \|\varphi\| \leqq 1, \varphi \geqq 0\}$; es w*-compacto convexo. Se ve que basta con encontrar $I \in K$ punto fijo de todas las T_a, T^a, T_{-1}. Tomo $\mathcal{F}$ el semigrupo generado por T_a, T^a, T_{-1}; es un semigrupo de isometrías. Hay que entrar en las hipótesis de Ryll-Nardzewski y listo. Tenemos w*-compacidad en vez de w-compacidad así que a $C(G)^*$ pongámosle la topología débil* (ahí la topología débil es la topología normal). Falta que la familia no sea contractiva, o sea que $0 \notin \overline{\{T(\varphi) - T(\psi) \mid T \in \mathcal{F}\}}^{w*}$ si $\varphi \neq \psi$ ambas en K. Ahora los elementos de $\mathcal{F}$ son de la forma $T_{-1}^\epsilon T_a T^b$ con $\epsilon \in \{0, 1\}, a, b \in G$. Entonces si $0 \in \overline{\{T(\varphi - \psi) \mid T \in \mathcal{F}\}}^{w*}$ hay una red $T_{-1}^{\epsilon_\alpha} T_{a_\alpha} T^{b_\alpha}(\varphi - \psi) \overset{w*}{\to} 0$. Por compacidad de G, pasando a una subred, hay $\epsilon \in \{0, 1\}, a, b \in G$ con $\epsilon_\alpha \to \epsilon$, $a_\alpha \to \alpha$ y $b_\alpha \to b$. Veamos que $T_{-1}^{\epsilon_\alpha} T_{a_\alpha} T^{b_\alpha}(\varphi - \psi) \overset{w*}{\to} T_{-1}^\epsilon T_a T^b(\varphi - \psi)$; después por Hausdorff y que las cosas son isometrías hay absurdo. Hay que ver que $\varphi(f(a_\alpha x b_\alpha)) \to \varphi(f(axb))$ y que $\varphi(f(b_\alpha^{-1} x^{-1} a_\alpha^{-1})) \to \varphi(f(b^{-1} x^{-1} a^{-1}))$, y también para ψ; por Riesz $\varphi(g) = \int g \, d\mu$ y por convergencia dominada basta ver que $f(a_\alpha x b_\alpha) \to f(axb)$ puntualmente, lo cual sale por continuidad de f. Listo.

Falta unicidad. Ahora si μ, ν son medidas de Haar, $\int f(x) \, d\mu(x) = \int (\int f(x) \, d\mu(x)) \, d\nu(y) = \int (\int f(xy) \, d\mu(x)) \, d\nu(y) = \int (\int f(xy) \, d\nu(y)) \, d\mu(x) = \int (\int f(y) \, d\nu(y)) \, d\mu(x) = \int f(y) \, d\nu(y)$.

1.7 Espacios de Hilbert

1. Un *espacio pre-Hilbert* es un $\mathbb{F}$-ev H con una aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{F}$ tal que $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$, $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, $\langle x, x\rangle \geqq 0$ con igualdad sii $x = 0$. Se define $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. En un pre-Hilbert vale Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y\rangle| \leqq \|x\|\|y\|$ con igualdad sii hay $\lambda \in \mathbb{F}$ con $x = \lambda y$. Entonces $\|\cdot\|$ es norma y H es normado. Se dice que H es un *espacio de Hilbert* si es pre-Hilbert Banach.

> Hay que probar CS. Ahora $\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \geqq 0$ con igualdad sii $x = \lambda y$. Esto da $\|x\|^2 + |\lambda|^2\|y\|^2 - \langle \lambda y, x\rangle - \langle x, \lambda y\rangle \geqq 0$ y $\|x\|^2 + |\lambda|^2\|y\|^2 \geqq 2\operatorname{Re}\overline{\lambda}\langle x, y\rangle$. Con $\overline{\lambda} \leftarrow \frac{\lambda}{\langle x,y\rangle}$ obtenemos $\|x\|^2 + \frac{\lambda^2}{|\langle x,y\rangle|^2}\|y\|^2 \geqq 2\lambda$. Es una cuadrática positiva, luego $B^2 - 4AC \leqq 0$ y $|\langle x, y\rangle| \leqq \|x\|\|y\|$, listo.

2. Polarización: $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j\|x + i^j y\|^2$. Pitágoras: si $x \perp y$, es decir $\langle x, y\rangle = 0$, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Paralelogramo: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. En particular H es uniformemente convexo, por lo que todo convexo cerrado tiene un único elemento de norma mínima. En particular si S es subespacio cerrado y $x \in H$ hay $y \in S$ único, que llamamos *proyección de x en S* o $\operatorname{pr}_S(x)$, con $\|x - y\|$ mínima; vale $\langle x - \operatorname{pr}_S(x), y\rangle = 0$ para todo $y \in S$.

> Si $y = \operatorname{pr}_S(x)$, $z \in S$, $\|x - y + \lambda z\|^2 = \|x - y\|^2 + |\lambda|^2\|z\|^2 + 2\operatorname{Re}\overline{\lambda}\langle x - y, z\rangle$ es mínimo con $\lambda = 0$. Poniendo $\lambda \in \mathbb{R}$ esto se minimiza en $-\frac{\operatorname{Re}\langle x-y,z\rangle}{\|z\|^2}$ y $\operatorname{Re}\langle x - y, z\rangle = 0$. Poniendo $\lambda \in i\mathbb{R}$, la cosa se minimiza en $-\frac{\operatorname{Im}\langle x-y,z\rangle}{\|z\|^2}$ y $\operatorname{Im}\langle x - y, z\rangle = 0$. Entonces $\langle x - y, z\rangle = 0$, como queríamos.

3. Si S es subespacio cerrado, $S^\perp = \{y \in H \mid (\forall x \in S)\langle x, y\rangle = 0\}$ es un subespacio cerrado, el *complemento ortogonal* de S. Tenemos $H = S \oplus S^\perp$ dado por $x = \operatorname{pr}_S(x) + (x - \operatorname{pr}_S(x))$, y $S^{\perp\perp} = S$.

4. Una conjunto $\{e_i\}_{i\in I}$ se dice *ortonormal* si $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$; *base ortonormal* si $\langle e_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ denso.

Bessel: si $x \in X$ vale $\sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2 \leqq \|x\|^2$ (Bessel). En particular $\{i \mid \langle x, e_i\rangle \neq 0\}$ es numerable.

> Por definición $\sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2 = \sup\limits_{J\subset I \text{ finito}} \sum_{i\in J}|\langle x, e_i\rangle|^2$. Si $y = \operatorname{pr}_{\langle e_i\rangle_{i\in J}}(x) = \sum_{i\in J} a_i e_i$, $\langle y, e_i\rangle = a_i$, $\|y\|^2 = \sum_{i\in J}|\langle x, e_i\rangle|^2$ por Pitágoras y $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2 \geqq \|y\|^2 = \sum_{i\in J}|\langle x, e_i\rangle|^2$, también por Pitágoras, listo. Ahora si $\{i \mid \langle x, e_i\rangle \neq 0\}$ fuera no numerable, habría $n \in \mathbb{N}$ con $\{i \mid |\langle x, e_i\rangle| \geqq \frac{1}{n}\}$ infinito, y $\sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2 = \infty$, absurdo.

Parseval: si $\{e_i\}_{i\in I}$ es base ortonomal y $x \in X$ entonces $x = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$ y $\|x\|^2 = \sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2$.

> Por Bessel $\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$ es numerable y converge absolutamente a y. Tenemos $\langle x - y, e_i\rangle = 0$ si $i \in I$, luego $x - y \in \langle e_i\rangle^\perp = 0$ y $x = y$.

Gram-Schmidt: si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\omega}$ es li, con ω ordinal, hay $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\omega}$ ortonormal con $\langle e_\alpha\rangle_{\alpha\in\varpi} = \langle x_\alpha\rangle_{\alpha\in\varpi}$ para todo $\varpi \leqq \omega$.

5. Riesz: si $T \in H^*$, hay $y \in H$ único con $T(x) = \langle x, y\rangle$; además $\|T\| = \|y\|$.

> Sea $y \in (\ker T)^\perp$ con $T(y) \neq 0$. Entonces $H = \langle y\rangle \oplus \ker T$. Tenemos $T(x) = T(\lambda y + x_0) = \lambda T(y) = \frac{T(y)}{\langle y,y\rangle}\langle \lambda y, y\rangle = \frac{T(y)}{\langle y,y\rangle}\langle \lambda y + x_0, y\rangle = \langle x, \overline{\frac{T(y)}{\langle y,y\rangle}}y\rangle$.

6. Lax-Milgram: si $a : H^2 \to \mathbb{R}$ es bilineal continua y coerciva (hay c con $|a(x,x)| \geqq c\|x\|^2$) entonces $y \mapsto a(-, y)$ es una biyección $H \to H^*$.

Por Riesz hay $T \in B(H)$ con $a(x,y) = \langle x, Ty \rangle$. De que a es coerciva sale $\|x\|\|Tx\| \geqq |\langle x, Tx \rangle| = |a(x,x)| \geqq c\|x\|^2$ y $\|Tx\| \geqq c\|x\|$, de donde $T(H)$ es cerrado y T es inyectiva. Si $T(H) \neq H$ hay $x \in H$ no nulo ortogonal, luego $\langle x, Tx \rangle = 0$ y $x = 0$, absurdo. Entonces T es biyectiva y listo.

1.8 Operadores en espacios de Hilbert

1. Adjunto: si $T \in B(H,K)$ hay un único $T^* \in B(K,H)$ con $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ para todos $x, y \in H$. Vale $(T+S)^* = T^* + S^*$, $(aT)^* = \overline{a}T^*$, $T^{**} = T$, $(TS)^* = S^*T^*$, $\|T^*\| = \|T\|$ y $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

> Dado y, $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ está en H^*, luego por Riesz hay T^*y con $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$. Se ve que es lineal, y $\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle \leqq \|TT^*x\|\|x\| \leqq \|T\|\|T^*x\|\|x\|$ y $\|T^*x\| \leqq \|T\|\|x\|$, con lo que $T^* \in B(K,H)$. Tenemos $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, T^{**}y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ y $T = T^{**}$, por lo que $\|T^{**}\| \leqq \|T^*\|$ y $\|T^*\| = \|T\|$. En $\|T^*x\|^2 \leqq \|TT^*x\|\|x\| \leqq \|T\|\|T^*x\|\|x\|$ hacemos tender $\|T^*x\|$ a $\|T\|$ con $\|x\| = 1$ y por sandwich obtenemos $\|TT^*\| \geqq \|T\|^2$, listo.

2. Vale $\ker T^* = T(H)^\perp$. Equivalen 1) T inversible, 2) T^* inversible, 3) hay $M > 0$ con $\|Tx\| \geqq M\|x\|$ y $\|T^*x\| \geqq M\|x\|$, 4) T y T^* inyectivas, $T(H)$ cerrado, 5) T inyectiva y $T(H) = H$, 6) T, T^* suryectivas.

> Si $y \in \ker T^*$, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = 0$ y $y \in T(H)^\perp$; si $y \in T(H)^\perp$, $0 = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ y $x \in \ker T^*$. T inversible es $\ker T = 0$ y $T(H) = H$. Implica $\overline{T^*(H)} = H$ y $\ker T^* = 0$; para ver que $T*$ es inversible basta ver que $T*(H)$ es cerrado; si $T^*x_n \to y$, $\|x_n - x_m\|^2 \leqq \|T^{-1}\|\|x_n - x_m\|\|T^*(x_n - x_m)\|$ y $\|x_n - x_m\| \leqq \|T^{-1}\|\epsilon$ si n, m grandes, luego x_n es Cauchy, converge a x y $y = T^*x$, listo 1 $\Leftrightarrow$ 2. 3 implica $\ker T = 0$ y $\overline{T(H)} = H$; se ve que $T(H)$ es cerrado y listo, 1 $\Leftrightarrow$ 3, e igual 4, 5 y 6.

3. Definiciones: $T \in B(H)$ es

1) Normal si $T^*T = TT^*$.
2) Autoadjunto (o Hermitiano) si $T = T^*$.
3) Isometría si $T^*T = \mathrm{id}$ o sea $(\forall x)\|Tx\| = \|x\|$.
4) Unitario si $T^*T = TT^* = \mathrm{id}$ (isometría suryectiva).
5) Positivo si $T = T^*$ y $\langle Tx, x\rangle \geqq 0$; se escribe $T \geqq S$ sii $T - S$ positivo.
6) Proyección o idempotente si $T^2 = T$.
7) Proyección ortogonal si $T = T^*$ y $T^2 = T$.
8) Isometría parcial si hay subespacio cerrado W con $T|_W$ isometría y $T|_{W^\perp} = 0$ sii U^*U es proyección.

4. Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, vale $\langle x, Ty\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^3 i^j\langle x + i^jy, T(x + i^jy)\rangle$. Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y T es autoadjunto vale $\langle x, Ty\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^2 (-1)^j\langle x + (-1)^jy, T(x + (-1)^jy)\rangle$. Si $\langle x, Tx\rangle = 0$ para todo x y $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $T = 0$; si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, y $T = T^*$, $T = 0$. Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ vale T autoadjunto sii $\langle x, Tx\rangle \in \mathbb{R}$ para todo x.

5. T es normal sii $\|Tx\| = \|T^*x\|$ para todo $x \in H$.

> Si T es normal $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2$. Si $\|Tx\| = \|T^*x\|$ para todo $x \in H$, $\langle x, T^*Tx\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle x, TT^*x\rangle$ y $\langle x, (T^*T - TT^*)x\rangle = 0$ para todo x. Ahora $T^*T - TT^*$ es autoadjunto, luego por lo anterior es cero y T es normal.

Si T es normal, $\ker T = \ker T^*$, $T(H)$ es denso sii T inyectivo, T inversible sii T acotada inferiormente, si $Tx = \lambda x$ entonces $T^*x = \overline{\lambda}x$, y si $Tx = ax$, $Ty = by$, $a \neq b \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$.

> Tenemos $Tx = \lambda x$ sii $x \in \ker(T - \lambda\mathrm{id})$, pero $\ker(T - \lambda\mathrm{id}) = \ker(T^* - \overline{\lambda}\mathrm{id})$ y $T^*x = \overline{\lambda}x$. Para lo último $a\langle x, y\rangle = \langle ax, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle x, \overline{b}y\rangle = b\langle x, y\rangle$ entonces $a = b$ o $\langle x, y\rangle = 0$.

Si T es normal, $\|T^n\| = \|T\|^n$.

Tenemos $\|T^{2^n}\|^2 = \|(T^*)^{2^n}T^{2^n}\| = \|(T^*T)^{2^n}\| = \|T^*T\|^{2^n} = \|T\|^{2^{n+1}}$ y vale para 2^n. Si vale para n vale para $n-1$, porque $\|T\|^n = \|T^n\| \leqq \|T\|\|T^{n-1}\| \geqq \|T\|^n$.

6. Si $T \geqq 0$ vale Cauchy-Schwarz: $|\langle Tx, y\rangle| \leqq \sqrt{\langle Tx, x\rangle\langle Ty, y\rangle}$.

Si $S \leqq T$, $A^*SA \leqq A^*TA$ para todo $A \in B(H)$; si $S \geqq 0$, $\|S\| \leqq \|T\|$. Sigue que $T^n \geqq 0$ si $T \geqq 0$.

Lo primero es obvio. Lo segundo por CS: $|\langle Sx, y\rangle| \leqq \sqrt{\langle Sx, x\rangle\langle Sy, y\rangle} \leqq \sqrt{\langle Tx, x\rangle\langle Ty, y\rangle} \leqq \|T\|$ si $\|x\| = \|y\| = 1$; con $\|x\| = 1$, $y = \frac{Sx}{\|Sx\|}$ queda $\|Sx\| \leqq \|T\|$ y $\|S\| \leqq \|T\|$.

Si $T \geqq 0$ hay un único operador positivo $T^{1/2}$ con $(T^{1/2})^2 = T$; conmuta con todos los que conmutan con T.

Poniendo $\frac{1}{\|T\|}T$ en vez de T podemos asumir wlog que $I - T \geqq 0$, y tenemos por lo anterior $\|I - T\| \leqq 1$. Definimos una secuencia de polinomios $p_0 = 0$, $p_{n+1}(t) = \frac{1}{2}(t + p_n(t)^2)$. Se ve que $p_n \nearrow 1 - (1-t)^{1/2}$ uniformemente en $[0, 1]$. Además se ve por inducción que $p_{n+1} - p_n$ tiene coeficientes positivos. Entonces $S_n = p_n(I - T)$ converge a un operador $0 \leqq S \leqq I$. Tenemos $(I - p_n(I - T))^2 \to (I - S)^2$ y $(I - p_n(I - T))^2 = I - 2p_n(I - T) + p_n(I - T)^2 = I - 2p_n(I - T) + 2p_{n-1}(I - T) - (I - T) \to T$ entonces $(I - S)^2 = T$ y $T^{1/2} = I - S$ cumple todo lo pedido.

Unicidad: si $A^2 = T$, $A \geqq 0$ y A conmuta con todos los que conmutan con T, entonces $(T^{1/2} - A)(T^{1/2} + A)x = 0$, luego $T^{1/2}x = Ax$ para todo $x \in S = \overline{(T^{1/2} + A)(H)}$. Ahora $S^\perp = \ker(T^{1/2} + A)$; si $x \in S^\perp$, $\langle T^{1/2}x, x\rangle \leqq \langle (T^{1/2} + A)x, x\rangle = 0$ y $T^{1/2}|_{S^\perp} = 0$; igualmente $A|_{S^\perp} = 0$ y $T^{1/2}x = Ax$ si $x \in S^\perp$. Entonces $T^{1/2}x = Ax$ para todo $x \in H$, listo.

Si $S, T \geqq 0$ y $ST = TS$, $ST \geqq 0$.

$ST = S^{1/2}TS^{1/2} \geqq 0$.

T positivo es inversible sii $T \geqq \epsilon I$ para algún $\epsilon > 0$. En ese caso $T^{-1} \geqq 0$, $T^{1/2}$ es inversible y $(T^{1/2})^{-1} = (T^{-1})^{1/2}$. Si $T \leqq S$, $S^{-1} \leqq T^{-1}$.

Si $T \geqq \epsilon I$, $T^2 \geqq \epsilon^2 I$ y $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^2x, x\rangle \geqq \langle \epsilon^2 x, x\rangle$, $\|Tx\| \geqq \epsilon\|x\|$ y es inversible. Si es inversible, $T^2 \geqq \epsilon^2 I$; ahora $T + \epsilon I$ es inversible por lo anterior, luego $(T^2 - \epsilon^2 I)(T + \epsilon I)^{-1} \geqq 0$ (por el punto anterior) y $T \geqq \epsilon I$. Que $T^{1/2}$ es inversible sale igual. Ahora $T \leqq S$ implica $S^{-1/2}TS^{-1/2} \leqq I$ y $\|S^{-1/2}TS^{-1/2}\| \leqq 1$; ahora $\|S^{-1/2}TS^{-1/2}\| = \|S^{-1/2}T^{1/2}T^{1/2}S^{-1/2}\| = \|S^{-1/2}T^{1/2}\|^2 = \|T^{1/2}S^{-1/2}\|^2$ (porque $\|T^*T\| = \|T\|^2$) $= \|T^{1/2}S^{-1}T^{1/2}\|$ y $T^{1/2}S^{-1}T^{1/2} \leqq I$, por lo que $S^{-1} \leqq T^{-1}$.

7. $U \in B(H)$ es isometría parcial sii U^*U es proyección ortogonal.

Si hay W con $U|_W$ isometría y $U|_{W^\perp} = 0$ veamos que $P = U^*U$ es proyección ortogonal $P|_W = \mathrm{id}$, $P|_{W^\perp} = 0$. Si $x \in W$, $\langle U^*Ux, x\rangle = \|x\|^2$ es igualdad de Cauchy-Schwarz, luego $U^*Ux = x$; si $x \in W^\perp$, $U^*Ux = 0$, listo. El recíproco es obvio.

8. Descomposición polar: dado $T \in B(H)$ hay un único operador positivo $|T|$ tal que $\|Tx\| = \||T|x\|$ y tal que $|T| = (T^*T)^{1/2}$. Es más, hay una única isometría parcial U con $\ker U = \ker T$ y $T = U|T|$. En particular $U^*U|T| = |T|$, $U^*T = |T|$ y $UU^*T = T$.

Tenemos $\langle |T|^2x, x\rangle = \||T|x\|^2 = \|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x\rangle$ así que por polarización $|T| = (T^*T)^{1/2}$. Tengo $\ker T = \ker|T| = \overline{|T|(H)}$. Defino U_0 en $|T|(H)$ dado por $U_0|T|x = Tx$; es isometría con $T(H)$; extiendo a U en $\overline{|T|(H)}$ que queda isometría con $\overline{T(H)}$ y luego pongo $Ux = 0$ para x en $\ker T$ y listo: U es isometría parcial y $T = U|T|$.

Si T es normal, hay U unitario que conmuta con T, T^* y $|T|$ tal que $T = U|T|$.

Tenemos $T^* = |T|U^* = U^*(U|T|U^*)$ entonces UU^* es $\mathrm{pr}_{\overline{T^*(H)}}$ que es $\mathrm{pr}_{\overline{T(H)}}$ (porque T es normal) que es U^*U. Entonces defino W que sea U en $\overline{T(H)}$ y id en $\ker T$, es unitario y $T = W|T|$. Por otro lado $(U|T|U^*)^2 = (U|T|U^*)(U|T|U^*) = U|T||T|U^* = TT^* = T^*T = |T|^2$ y $U|T|U^* = |T|$. Entonces $U|T| = U|T|U^*U = |T|U$, y W conmuta con $|T|$, T y T^*.

9. Radio numérico: dado $T \in B(H)$ se define como $|||T||| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle \mid x \in H, \|x\| \leqq 1\}$. Vale que $|||\cdot|||$ es una norma con $\frac{1}{2}\|T\| \leqq |||T||| \leqq \|T\|$, $|||T^2||| \leqq |||T|||^2$ y $|||T||| = \|T\|$ si T es normal.

Es obvio que es una norma dominada por $\|\cdot\|$. Tenemos $2\langle Tx, y\rangle + 2\langle Ty, x\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle$. Tomando módulo esto es $\leqq |||T|||(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = |||T|||2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leqq 4|||T|||$ si $\|x\|, \|y\| \leqq 1$. Poniendo $y = \frac{Tx}{\|Tx\|}$ obtenemos $\|Tx\| + \frac{1}{\|Tx\|}\operatorname{Re}\langle T^2x, x\rangle \leqq 2|||T|||$. Multiplicando T por $\sqrt{\frac{|\langle T^2x,x\rangle|}{\langle T^2x,x\rangle}}$ obtenemos $\|Tx\| + \frac{1}{\|Tx\|}|\langle T^2x, x\rangle| \leqq 2|||T|||$ y $\|T\| \leqq 2|||T|||$. A su vez $|\langle T^2x, x\rangle| \leqq 2|||T|||\|Tx\| - \|Tx\|^2 \leqq |||T|||^2$. Si T es normal $\|T\|^{2^n} = \|T^{2^n}\| \leqq 2|||T^{2^n}||| \leqq 2|||T|||^{2^n}$. Con $n \to \infty$ obtenemos $\|T\| \leqq |||T|||$ y $\|T\| = |||T|||$, listo.

Ejercicio 74. Si T es normal entonces $\ker T^n = \ker T$.

> $\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2$ entonces si $T^*Tx = 0$, $Tx = 0$ así que $\ker T^*T = \ker T$. Ahora $\|T^*Tx\| = \|T^2x\|$ por normalidad, luego $\ker T^2 = \ker T$. Iterando obtenemos $\ker T^{2^n} = \ker T$. Ahora $\ker T \subset \ker T^n \subset \ker T^{n+1}$, luego si vale para $n+1$ vale para n, listo.

Ejercicio 75. Sea (X, μ) un espacio medida, $k : X \times X \to \mathbb{F}$ medible y a, b constantes tales que $\int |k(x,y)|\, dy \leqq a$ ae y $\int |k(x,y)|\, dx \leqq b$ ae. Definimos $K : L^2 \to L^2$ por $(Kf)(x) = \int k(x,y)f(y)\, dy$. Mostrar que K está bien definido y es un operador con $\|K\| \leqq \sqrt{ab}$.

> Si $f \in L^2$, $|(Kf)(x)|^2 = |\int k(x,y)f(y)\, dy|^2 \leqq |\int |k(x,y)||f(y)|\, dy|^2 =$
>
> $$= \left|\int |k(x,y)|^{1/2}|k(x,y)|^{1/2}|f(y)|\, dy\right|^2 \leqq \int |k(x,y)|\, dy \int |k(x,y)||f(y)|^2\, dy \leqq a \int |k(x,y)||f(y)|^2\, dy.$$
>
> Entonces $\|Kf\| =$
>
> $$= \int |Kf(x)|^2\, dx \leqq a \iint |k(x,y)||f(y)|^2\, dy\, dx = a \iint |k(x,y)||f(y)|^2\, dx\, dy \leqq ab \int |f(y)|^2\, dy = ab\|f\|^2.$$
>
> Listo.

Ejercicio 76. Un operador $T \in B(H)$ se dice *de Hilbert-Schmidt* si hay una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $\|T\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2 < \infty$.

a) Probar que esto no depende de la base.

> Si $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es otra base tenemos $\|Te_n\|^2 = \sum_{m\in\mathbb{N}} |\langle Te_n, f_m\rangle|$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} |\langle Te_n, f_m\rangle| = \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, T^*f_m\rangle| = \sum_{m\in\mathbb{N}} \|T^*f_m\|^2$. Listo.

b) Sea (X, μ) un espacio medida σ-finito, $k \in L^2(X \times X)$ y $K : L^2 \to L^2$ por $(Kf)(x) = \int k(x,y)f(y)\, dy$. Entonces K es de Hilbert-Schmidt con $\|K\|_{\text{HS}} = \|k\|_{L^2}$.

> Es obvio expandiendo $\|k\|$ con la base ortonormal $\{\overline{e_n(x)}e_m(y)\}_{n,m\in\mathbb{N}}$, donde e_n es una base ortonormal de L^2. Lo que hay que probar es que ésta es en efecto una base de $L^2(X \times X)$. Es una cuentita.

c) Si T es HS, $\|T\| \leqq \|T\|_{\text{HS}}$ (fácil), es límite de operadores de rango finito (obvio con lo anterior), si $S \in B(H)$, ST y TS son de HS (también obvio), y $\ker(T - \lambda)$ tiene dimensión finita (extiendo una base y uso que $\|T\|_{\text{HS}}$ no depende de la base).

1.9 Operadores compactos y de Fredholm

1. $T : H \to K$ es de *de rango finito*, $T \in B_f(H,K)$, si $\dim \operatorname{rg} T < \infty$; es *compacto*, $T \in B_0(H,K)$ si $T(\overline{B}(0,1))$ es compacto; vale $B_f \subset B_0 \subset B$. Equivale T compacto, $T(\overline{B}(0,1))$ totalmente acotado, T es límite de B_f, $T|_{\overline{B}}$ es w-norma continua. B_0 es un ideal, $T \in B_0$ sii $T^* \in B_0$, si $\{e_n\}$ es base ortonormal $T \in B_0$ sii $\|T - \operatorname{pr}_{\langle e_1,\dots,e_n\rangle} T\| \to 0$, y si T diagonalizable $(Te_n = \lambda e_n)$ $T \in B_0$ sii $\lambda_n \to 0$.

> Para $\|T - \operatorname{pr}_{\langle e_1,\dots,e_n\rangle} T\| \to 0$ vemos primero convergencia puntual y después usamos que $T(B)$ es totalmente acotado. Para lo último usamos $\|T - \operatorname{pr}_{\langle e_1,\dots,e_n\rangle} T\| = \sup\limits_{k>n} |\lambda_k|$.

2. Si $T \in B(H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ se dice *autovalor* de T si $\ker(T-\lambda) \neq 0$; sea $\sigma_p(T)$, el *espectro puntual* de T, el conjunto de autovalores de T. Si $T \in B_0(H)$, $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq 0$, $\ker(T-\lambda)$ tiene dimensión finita.

> Si $\ker(T-\lambda)$ tiene dim infinita, hay e_n ortonormal con $Te_n = \lambda e_n$, hay una subsecuencia convergente y $\lambda e_n - \lambda e_{n+1} \to 0$, absurdo.

3. $(\mathbb{F} = \mathbb{C})$ Si $T \in B_0(H)$ es normal es diagonalizable, o sea $Tx = \sum_{i\in I} \lambda_i \langle x, e_i\rangle e_i$ con $\{e_i\}$ ortonormal.

> Primero, lema: si $T \in B_0(H)$ es normal, $\langle Tx, x\rangle$ es w-continua en B, luego tiene máximo; vimos que $\sup\limits_{x\in B} |\langle Tx,x\rangle| = \|T\|$, luego hay $x \in B$ con $|\langle Tx, x\rangle| = \|T\|$, lo cual es igualdad en CS, $Tx = \lambda x$ y $|\lambda| = \|T\|$. Ahora Zorn sobre los sistemas ortonormales de autovectores $\{e_i\}$ tenemos uno maximal; sea $P = \operatorname{pr}_{\overline{\langle e_i\rangle}}$; $TPx = T(\sum \langle x, e_i\rangle e_i) = \sum T(\langle x, e_i\rangle e_i) = \sum \langle x, e_i\rangle \lambda_i e_i = \sum \langle x, \overline{\lambda}_i e_i\rangle e_i = \sum \langle x, T^* e_i\rangle e_i = \sum \langle Tx, e_i\rangle e_i = PTx$; entonces $TP = PT$ y $(1-P)T$ es normal y compacto; si $P \neq 1$, $(1-P)T = 0$ y cualquiera de norma 1 de $(1-P)(H)$ aumenta $\{e_i\}$ o $(1-P)T \neq 0$ y por el lema sobre $(1-P)T$ también aumentamos $\{e_i\}$; entonces $P = 1$ y $Tx = \sum_{i\in I} \lambda_i \langle x, e_i\rangle e_i$.

4. Si $T \in B_0(H)$ y $f : \sigma_p(T) \to \mathbb{C}$ con $f(\lambda_n) \to 0$, definimos $f(T)$ como $\sum f(\lambda_i)\langle x, e_i\rangle e_i$, y $f \mapsto f(T)$ es un morfismo de *-álgebras.

5. El *álgebra de Calkin* es $B(H)/B_0(H)$. Un operador se dice *de Fredholm* si es inversible en el álgebra de Calkin; la clase se denota $F(H)$. $T \in F(H)$ sii $\dim\ker T < \infty, \dim\ker T^* < \infty$ y $T(H)$ es cerrado

> Si $T \in F$, $\dim\ker T < \infty$ sale porque $\dim\ker((ST-1)+1) < \infty$ porque $ST - 1$ compacto. Sea $A \in B_f$ con $\|A - (ST-1)\| < \frac{1}{2}$; tenemos que si $x \in \ker A$, $\|S\|\|Tx\| \geqq \|STx\| = \|(1+ST-1-A+A)x\| \geqq \|x\| - \frac{1}{2}\|x\|$ y $T(\ker A)$ es cerrado; ahora $T(H) = T(\ker A \oplus \ker A^\perp) = T(\ker A) + T(\ker A^\perp)$, que es cerrado + dim finita, cerrado. Recíproco: Tengo que $T|_{\ker T^\perp}$ es biyectiva $\ker T^\perp \to \operatorname{rg} T$, luego tiene inversa continua S que extendemos con $S|_{\operatorname{rg} T^\perp} = 0$ y tenemos $ST = 1 - \operatorname{pr}_{\ker T}$ y $TS = 1 - \operatorname{pr}_{\ker T^*}$.

6. Si $T \in F(H)$ se define el *índice* de T como $\operatorname{ind} T = \dim\ker T - \dim\ker T^*$.

7. Si $T \in F$, $A \in B_0$, $\operatorname{ind}(T+A) = \operatorname{ind} T$.

> Primero, $T \in F$ sii hay subespacios cerrados H_1, H_2 con $\dim H_1^\perp, \dim H_2^\perp < \infty$ y $\operatorname{pr}_{H_2} T|_{H_1}$ es inversible, y $\operatorname{ind} T = \dim H_1^\perp - \dim H_2^\perp$ (es una cuenta poniendo $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix}$ y $T^* = \begin{pmatrix} T_{11}^* & T_{21}^* \\ T_{12}^* & T_{22}^*\end{pmatrix}$).
>
> Segundo, veamos que $F_n = \{T \in F \mid \operatorname{ind} T = n\}$ es abierto. Si $T \in F$, $T|_{\ker T^\perp}$ es inversible. Si $A \in B$, $(T + \operatorname{pr}_{\operatorname{rg} T} A)|_{\ker T^\perp}$ se puede tomar inversible si $\|A\|$ chico, y $T + A \in F_n$ por lo anterior.
>
> Tercero, $\lambda \mapsto \operatorname{ind}(T+\lambda A)$ es constante usando lo anterior, así que $\operatorname{ind}(T+A) = \operatorname{ind} T$, listo.

8. Si $T, S \in F$, $\operatorname{ind} TS = \operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S$.

> Tenemos las dos biyecciones $S|_{\ker S^\perp}^{-1}(\ker T^\perp \cap \operatorname{rg} S) \xrightarrow{S} \ker T^\perp \cap \operatorname{rg} S \xrightarrow{T} T(\ker T^\perp \cap \operatorname{rg} S)$. Entonces $\operatorname{ind}(TS) = \operatorname{codim} S|_{\ker S^\perp}^{-1}(\ker T^\perp \cap \operatorname{rg} S) - \operatorname{codim} T(\ker T^\perp \cap \operatorname{rg} S)$. Ahora $\operatorname{codim} S|_{\ker S^\perp}^{-1}(\ker T^\perp \cap \operatorname{rg} S) = \dim\ker S + \operatorname{codim}_{\ker S^\perp} S|_{\ker S^\perp}^{-1}(\ker T^\perp \cap \operatorname{rg} S) = \dim\ker S + \operatorname{codim}_{\operatorname{rg} S}(\ker T^\perp \cap \operatorname{rg} S) = \dim\ker S + \dim(\ker T \cap \operatorname{rg} S)$. Por otro lado $\operatorname{codim} T(\ker T^\perp \cap \operatorname{rg} S) = \dim\operatorname{rg} T^\perp + \operatorname{codim}_{\operatorname{rg} T} T(\ker T^\perp \cap \operatorname{rg} S) = \dim\operatorname{rg} T^\perp + \operatorname{codim}_{\ker T^\perp}(\ker T^\perp \cap \operatorname{rg} S) = \dim\operatorname{rg} T^\perp + \operatorname{codim}(\ker T^\perp \cap \operatorname{rg} S) - \dim\ker T = \dim\operatorname{rg} T^\perp + \dim(\ker T \cap \operatorname{rg} S) + \dim\operatorname{rg} S^\perp - \dim\ker T$. Restando obtenemos el resultado.

9. Alternativa de Fredholm: si $T \in B_0$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $T - \lambda$ es inversible o $\ker(T-\lambda) \neq 0$, y $\dim\ker(T^* - \overline{\lambda}) = \dim\ker(T - \lambda)$.

> Tenemos que $T - \lambda \in F$, $\operatorname{ind}(T-\lambda) = \operatorname{ind} 1 = 0$ y $\dim\ker(T^* - \overline{\lambda}) = \dim\ker(T-\lambda)$. Si $\ker(T-\lambda) = 0$, $\ker(T^* - \overline{\lambda}) = 0$; como $\operatorname{rg}(T-\lambda)$ es cerrado, $T - \lambda$ es sobreyectiva, luego es inversible.

1.10 Teoría espectral

1. Un *álgebra de Banach* $\mathcal{B}$ es un Banach con una multiplicación tal que $\|AB\| \leqq \|A\|\|B\|$. Se dice *unital* si hay 1. $A \in \mathcal{B}$ se dice *inversible* si hay $A^{-1} \in \mathcal{B}$ con $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$; se pone $A \in \mathrm{GL}(\mathcal{B})$. GL es abierto y $^{-1}$ es homeomorfismo.

Si $T \in \mathrm{GL}$, $T + A = T(1 + T^{-1}A)$. Ahora $(1 + T^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-T^{-1}A)^n$ si $\|A\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. Entonces GL es abierto. Basta ver que $^{-1}$ es continua, pero es una cuentita.

2. Sea $\mathcal{U}$ una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach unital y $A \in \mathcal{U}$; definimos el *espectro* de A como $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda \notin \mathrm{GL}\}$. Tenemos $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow |\lambda| \leqq \|A\|$, entonces podemos definir el *radio espectral* de A como $r(A) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$. Vale $r(A) \leqq \inf \|A^n\|^{1/n}$. Si $A \in \mathcal{U}$, $\sigma(A)$ es un conjunto compacto de $\mathbb{C}$ no vacío y $r(A) = \lim \|A^n\|^{1/n}$.

Para $r(A) \leqq \inf \|A^n\|^{1/n}$ vemos que $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ si $\lambda \in \sigma(A)$. Que $\sigma(A)^c$ es abierto sale porque GL es abierto. Entonces $\sigma(A)$ es compacto (cerrado y acotado). Sea $\varphi \in \mathcal{U}^*$ (el dual) y $f(\lambda) = \varphi((A - \lambda)^{-1})$. Es holomorfa en $\sigma(A)^c$ porque tiene expansión local como serie de potencias. Si $|\lambda| > \|A\|$ vale $f(\lambda) = -\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}\varphi(A^n)$ y $|f(\lambda)| \leqq \frac{\|\varphi\|}{|\lambda| - \|A\|}$, por lo que $|f(\lambda)| \to 0$ si $|\lambda| \to \infty$. Si $\sigma(A) = \varnothing$, $f(\lambda)$ es una función analítica entera en $C_0(\mathbb{C})$ y por Liouville $f = 0$, absurdo. Ahora ponemos $\lambda = re^{i\theta}$, con $|r| > r(A)$, y $\int_0^{2\pi} \lambda^{N+1} f(\lambda)\, d\theta = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} r^{N-n}e^{i\theta(N-n)}\varphi(A^n)\, d\theta = -2\pi\varphi(A^N)$, por lo que $|\varphi(A^N)| \leqq r^{N+1}\|\varphi\| \sup_{\theta \in [0,2\pi]} \|(A - \lambda)^{-1}\|$; eligiendo φ y tomando límite $N \to \infty$ y luego $r \to r(A)$ obtenemos $\limsup \|A^n\|^{1/n} \leqq r(A)$, pero $r(A) \leqq \inf \|A^n\|^{1/n}$ así que $r(A) = \lim \|A^n\|^{1/n}$, listo.

3. Si $\mathcal{U}$ es de división ($\mathrm{GL} = \mathcal{U} \setminus \{0\}$) entonces es $\mathbb{C}$.

Si $A \in \mathcal{U}$, sea $\lambda \in \sigma(A)$; $A - \lambda \notin \mathrm{GL}$ así que $A = \lambda$. Listo.

4. Sea $\mathcal{U}$ un álgebra de Banach unital conmutativa; $\hat{\mathcal{U}}$ es el conjunto de *caracteres*, viz morfismos de álgebras $\mathcal{U} \to \mathbb{C}$ no triviales; son todos continuos, sus núcleos son todos los ideales maximales, $\sigma(A) = \{\gamma(A) \mid \gamma \in \hat{\mathcal{U}}\}$ y $\hat{\mathcal{U}}$ como w*-subespacio de $\overline{B}_{\mathcal{U}^*}(0,1)$ es compacto Hausdorff.

Los caracteres con continuos: $\ker\gamma$ es un ideal maximal (porque $\mathcal{U}/\ker\gamma = \mathbb{C}$) y los ideales maximales son cerrados (porque la clausura es un ideal propio, porque GL es abierto), listo. Si $\mathcal{M}$ es ideal maximal, $\pi_{\mathcal{U}/\mathcal{M}} \in \hat{\mathcal{U}}$ (porque álgebra de Banach que es cuerpo es $\mathbb{C}$). Etc.

5. Una *C*-álgebra* es un álgebra de Banach $\mathcal{U}$ con una *involución* $^* : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, viz una función tal que $A^{**} = A$, $(A + \lambda B)^* = A^* + \overline{\lambda}B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$, tal que $\|A^*A\| = \|A\|^2$ (y por lo tanto $\|A^*\| = \|A\|$).

6. Si $\mathcal{U}$ es una C*-álgebra, $T \in \mathcal{U}$ se dice normal si $TT^* = T^*T$ (vale $r(T) = \|T\|$), autoadjunto si $T^* = T$ (vale $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$) y unitario si $T^*T = TT^* = 1$ (vale $\sigma(T) \subset \mathbb{S}^1$).

Si T es unitario y $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1}) = \sigma(T^*)$, entonces $|\lambda|, |\lambda^{-1}| \leqq \|T\| = 1$ y $|\lambda| = 1$. Si $T = T^*$, ponemos $e^{iT} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(iT)^n$ y e^{iT} es unitario; además una cuenta da que si $\lambda \in \sigma(T)$, $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{iT})$, por lo que $|e^{i\lambda}| = 1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. La *transformada de Gelfand* $\Gamma : \mathcal{U} \to C(\hat{\mathcal{U}})$ dada por $\Gamma(T)(\gamma) = \gamma(T)$ (escribimos $\hat{T} = \Gamma(T)$) es un *-isomorfismo isométrico si $\mathcal{U}$ es C*-álgebra unital conmutativa.

Lo único no trivial de que es *-morfismo es $\Gamma(T^*) = \Gamma(T)^*$; para $T = T^*$ es obvio porque $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$; en general $T = A + iB$, con $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$ y $B = \frac{1}{2}i(T^* - T)$ autoadjuntos, y $\Gamma(T^*) = \Gamma(A - iB) = \Gamma(A + iB)^* = \Gamma(T)^*$. Como $\mathcal{U}$ es abeliana todos son normales, $\|\Gamma(T)\| = r(T) = \|T\|$ y Γ es isometría. Falta ver que es suryectiva. Para eso usamos Stone-Weierstrass: hay que ver que $\Gamma(\mathcal{U})$ separa puntos, es autoadjunta y contiene a las constantes, así que listo.

8. (Cálculo funcional) Si T es normal en una C*-álgebra unital $\mathcal{U}$, $C^*(T) = \overline{\mathbb{C}[T, T^*]}$, hay un *-isomorfismo isométrico $\varphi : C(\sigma(T)) \to C^*(T)$ con $\varphi(1) = 1$ y $\varphi(\mathrm{id}) = T$.

Sea $\sigma^*(T)$ el espectro en $C^*(T)$ y $X = C^*(T)\hat{}$. Defino $\Theta : C(\sigma^*(T)) \to C(X)$ dada por $\Theta(f)(\gamma) = f(\gamma(T))$. Se ve que es un *-isomorfismo isométrico (hay que ver que $\gamma \mapsto \gamma(T)$ es homeo $X \to \sigma^*(T)$). Sea $\Gamma : C^*(T) \to C(X)$ la tr de Gelfand. Pongo $\varphi = \Gamma^{-1} \circ \Theta$; vale $\varphi(1) = 1$ y $\varphi(\mathrm{id}) = T$. Resta ver que $\sigma^*(T) = \sigma(T)$; una inclusión es obvia. Si $\lambda \in \sigma^*(T)$, dado $\epsilon > 0$ sea $f \in C(\sigma^*(T))$ con $\|f\|_\infty = 1$, $f(\lambda) = 1$ y $f(\mu) = 0$ si $|\lambda - \mu| \geqq \epsilon$; sea $A = \varphi(f)$; tenemos $\|(T - \lambda)A\| = \|\varphi^{-1}((T - \lambda)A)\| = \|(\mathrm{id} - \lambda)f\|_\infty \leqq \epsilon$; entonces $T - \lambda$ no puede ser inversible y $\lambda \in \sigma(T)$, listo.

9. $T \in B(H)$ es autoadjunto sii $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, positivo sii $\sigma(T) \subset \mathbb{R}_+$, unitario sii $\sigma(T) \subset \mathbb{S}^1$, proyección ortogonal sii $\sigma(T) \subset \{0, 1\}$.

Primero, $\lambda \in \sigma(T)$ sii hay $x_n \in H$, $\|x_n\| = 1$ con $(T - \lambda)x_n \to 0$ o $(T^* - \overline{\lambda})x_n \to 0$.

Segundo, si T es normal, $\lambda \in \sigma(T)$ sii para todo $\epsilon > 0$ hay x con $\|x\| = 1$ y $\|(T - \lambda)x\| < \epsilon$.

Tercero, si T normal, $\lambda \in \sigma(T)$ es punto aislado, es autovalor, porque puedo definir $f(\lambda) = 1$ y el resto 0, $(T - \lambda)\varphi(f) = 0$ pero $\varphi(f) \neq 0$, luego hay x con $y = \varphi(f)x \neq 0$ y $Ty = \lambda y$, listo.

Cuarto, $T = T^*$ sii $\mathrm{id} = \mathrm{id}^*$ sii $\lambda = \overline{\lambda}$ para todo $\lambda \in \sigma(T)$ sii $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Quinto, si $T \geqq 0$ y $\lambda < 0$, $\|(T - \lambda)x\|^2 = \|Tx\|^2 - 2\lambda\langle Tx, x\rangle + \lambda^2\|x\|^2 \geqq \lambda^2\|x\|^2$ y es inversible, por lo que $\lambda \notin \sigma(T)$; entonces $\sigma(T) \subset \mathbb{R}_+$. Si $\sigma(T) \subset \mathbb{R}_+$, ponemos $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$, $T = \varphi(f)^2$, $\langle Tx, x\rangle = \langle \varphi(f)^2 x, x\rangle = \langle \varphi(f)x, \varphi(f)x\rangle \geqq 0$ y $T \geqq 0$, listo. Si $S \geqq 0$, $S^2 = T$, veamos que $S = T^{1/2}$: $T \in C^*(S)$ entonces $T^{1/2} \in C^*(S)$, luego $T^{1/2} = \varphi_S(f)$, pero $f^2 = \mathrm{id}^2$, $f = \mathrm{id}$ y $T^{1/2} = S$.

Sexto, $T^* = T^{-1}$ sii $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}^{-1}$ sii $\overline{\lambda} = \lambda^{-1}$ para todo $\lambda \in \sigma(T)$ sii $\sigma(T) \in \mathbb{S}^1$.

Séptimo, $T^2 = T$ sii $\mathrm{id}^2 = \mathrm{id}$ sii $\lambda^2 = \lambda$ para todo $\lambda \in \sigma(T)$ sii $\sigma(T) \subset \{0, 1\}$.

Ejercicio 1. $T \in B_0(H)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $N_n = \ker(T-\lambda)^n$, $R_n = \mathrm{rg}(T-\lambda)^n$. Demostrar que hay n con $N_n = N_{n+1}$ y hay n con $R_n = R_{n+1}$.

Supongamos que $N_n \subsetneqq N_{n+1}$ para todo n. Entonces hay $x_n \in N_{n+1} \cap N_n^\perp$ con $\|x_n\| = 1$.

(En efecto, si $x \in N_{n+1}$ pero $x \notin N_n$, como N_n es cerrado por ser el núcleo de un operador acotado, $x = x_{N_n} + x_{N_n^\perp}$, con $x_{N_n} \in N_n$ y $x_{N_n^\perp} \in N_n^\perp$. Ahora $x_{N_n^\perp} = x - x_{N_n} \in N_{n+1}$, porque tanto x como x_{N_n} están, así que $x_n = \frac{x_{N_n^\perp}}{\|x_{N_n^\perp}\|} \in N_{n+1} \cap N_n^\perp$ y $\|x_n\| = 1$.)

Ahora bien, $x_n \in N_{n+1}$, por lo que $(T-\lambda)x_n \in N_n$ y $Tx_n = (T-\lambda)x_n + \lambda x_n = y_n + \lambda x_n$ con $y_n \in N_n$.

Por compacidad de T hay una subsecuencia x_{n_k} con Tx_{n_k} convergente. Ahora $Tx_{n_k} = y_{n_k} + \lambda x_{n_k}$ y $Tx_{n_{k+1}} = y_{n_{k+1}} + \lambda x_{n_{k+1}}$. Tenemos que $x_{n_{k+1}} \in N_{n_{k+1}}^\perp$ y los tres restantes están en $N_{n_{k+1}}$ (porque $N_{n_k} \subset N_{n_k+1} \subset N_{n_{k+1}}$). Entonces $\|Tx_{n_{k+1}} - Tx_{n_k}\|^2 = \|\lambda x_{n_{k+1}}\|^2 + \|y_{n_{k+1}} + Tx_{n_k}\|^2 \geqq |\lambda|^2$. Lo cual, en virtud de que $\lambda \neq 0$, contradice que Tx_{n_k} converge. El absurdo prueba la aserción.

Probemos ahora que hay n tal que $R_n = R_{n+1}$. Tenemos que $(T-\lambda)^n$ es de Fredholm para cada n y su índice es n veces el índice de $T-\lambda$, que es el índice de 1, es decir, 0. Entonces $\dim N_n = \dim R_n^\perp$ para cada n. Acabamos de probar que hay n con $\dim N_n = \dim N_{n+1}$, por lo que $\dim R_n^\perp = \dim R_{n+1}^\perp$. Como $R_n \supset R_{n+1}$, $R_n^\perp \subset R_{n+1}^\perp$; como, por Fredholm, son de dimensión finita e igual, resulta que $R_n^\perp = R_{n+1}^\perp$. Como son cerrados (también por ser Fredholm los operadores), esto implica $(R_n^\perp)^\perp = (R_{n+1}^\perp)^\perp$ y $R_n = R_{n+1}$, como queríamos.

Ejercicio 2. $A \in B(H)$, $A \geqq 0$, $\|A\| \leqq 1$, $\|A^2 - A\| < \epsilon < \frac{1}{4}$. Hay una proyección ortogonal $P \in B(H)$ con $\|P - A\| < 2\epsilon$ y $PA = AP$.

El teorema relevante dice que hay un *-isomorfismo isométrico $\varphi : C(\sigma(A)) \to C^*(A)$ que manda $1 \mapsto 1$ y $\mathrm{id} \mapsto A$, donde $\sigma(A)$ es el espectro de A y $C^*(A)$ es la subálgebra cerrada generada por 1 (la identidad, I, Id), A y A^* (todos operadores que conmutan con A, por supuesto).

De $A \geqq 0$ y $\|A\| \leqq 1$ sale que $\sigma(A) \subset [0,1]$.

Entonces $\|A^2 - A\| = \|\varphi^{-1}(A^2 - A)\|_\infty = \|\varphi^{-1}(A)\varphi^{-1}(A-1)\|_\infty = \|\mathrm{id}(\mathrm{id}-1)\|_\infty$ así que para todo $\lambda \in \sigma(A)$ vale $|\lambda(\lambda-1)| < \epsilon < \frac{1}{4}$. Como $\lambda \in [0,1]$, esto es $\lambda(1-\lambda) < \epsilon$.

Sea $\lambda \in \sigma(A)$. Veamos que $\lambda \notin [2\epsilon, 1-2\epsilon]$. Supongamos que $\lambda \in [2\epsilon, 1-2\epsilon]$. Como $\lambda(1-\lambda)$ es cóncava hacia abajo, su mínimo en $[2\epsilon, 1-2\epsilon]$ está en un extremo, y es $2\epsilon(1-2\epsilon)$. Es decir, $\lambda(1-\lambda) \geqq 2\epsilon(1-2\epsilon)$. Ahora teníamos $\lambda(1-\lambda) < \epsilon$. Entonces $2\epsilon(1-2\epsilon) < \epsilon$ y $\frac{1}{4} < \epsilon$, absurdo.

Entonces $\sigma(A) \subset [0, 2\epsilon) \cup (1-2\epsilon, 1]$.

Podemos definir $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ dada por $f(\lambda) = 0$ si $\lambda \in [0, 2\epsilon)$ y $f(\lambda) = 1$ si $\lambda \in (1-2\epsilon, 1]$. Como estos dos conjuntos se pueden ver como abiertos (relativos) disjuntos (porque $\epsilon < \frac{1}{4}$), esta función está en $C(\sigma(A))$.

Entonces podemos definir $P = \varphi(f) \in C^*(A)$, un operador que conmuta con A.

Tenemos $P^* = \varphi(f^*) = \varphi(f) = P$ y $P(P-1) = \varphi(f(f-1)) = 0$ (porque $f(\lambda) = 0$ o 1) así que P es proyección ortogonal.

Tenemos $\|P - A\| = \|\varphi^{-1}(P - A)\| = \|f - \mathrm{id}\|_\infty$. Ahora $|f(\lambda) - \lambda|$ es $|\lambda|$ si $\lambda \in [0, 2\epsilon)$ y $|\lambda - 1|$ si $\lambda \in (1-2\epsilon, 1]$. En ambos casos tenemos $|f(\lambda) - \lambda| < 2\epsilon$, por lo que $\|f - \mathrm{id}\|_\infty \leqq 2\epsilon$ y $\|P - A\| \leqq 2\epsilon$. Si hubiéramos tomado un ϵ más chico (posible, porque el enunciado dice $\|A^2 - A\| < \epsilon$), acá tendríamos un menor como queremos. Listo.