Análisis

Juan Dodyk

Índice

1 Conjuntos

Axiomas de ZFC y construcciones básicas Escribimos sobre el lenguaje que tiene infinitas variables, $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Los objetos se llaman *conjuntos*. Entre ellos tenemos una relación $\in$ llamada *pertenencia*; definimos *igualdad* $=$ como $A = B$ sii $\forall X(A \in X \Leftrightarrow B \in X) \wedge \forall X(X \in A \Leftrightarrow X \in B)$. Decimos $\exists! x P(x)$, donde P es una fórmula proposicional con x libre, queriendo decir $\exists x P(x) \wedge \forall xy((P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow x = y)$, o sea existe y es único. *Axioma de extensión*: para todos A, B se tiene $A = B$ sii $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$. Podemos entonces determinar unívocamente un conjunto A por una propiedad, es decir, una fórmula proposicional P con una sola variable libre x, que dice $x \in A$ sii $P(x)$; escribimos $A = \{x \mid P(x)\}$. También por extensión: si $x_1, \ldots, x_n$ son sus elementos escribimos $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Definimos la *inclusión* de conjuntos: $A \subset B$ sii $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$; el axioma de extensión dice $A = B$ sii $A \subset B$ y $B \subset A$. *Axioma del vacío*: existe un conjunto $\varnothing$ tal que $\forall x(x \notin \varnothing)$; es único por extensión; se podría haber escrito $\{\}$ o $\{x \mid x \neq x\}$. *Axioma de la unión*: para todo A existe $\{x \mid \exists B \in A(x \in B)\}$ y se llama $\bigcup A$. *Axioma de la potencia*: para todo A existe $\{X \mid X \subset A\}$; se llama $\mathcal{P}(X)$. Tenemos $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ y $\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Axioma del reemplazo: si P es una fórmula proposicional con sólo dos variables libres x, y, A es un conjunto y $(\forall x \in A)(\exists! y) P(x, y)$ entonces existe $\{y \mid (\exists x \in A) P(x, y)\}$. Se deduce que para todos A, B existe el *par* $\{A, B\}$: definimos $P(x, y)$ sobre $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ como

$(x = \varnothing \Rightarrow y = A) \wedge (x = \{\varnothing\} \Rightarrow y = B)$ y aplicamos reemplazo. Existe la unión de dos: dados A, B existe $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ porque es $\bigcup\{A, B\}$; tenemos $A \cup B = B \cup A$ y $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. *Especificación*: si P es una propiedad y A conjunto existe $\{x \mid x \in A \wedge P(x)\}$ también escrito $\{x \in A \mid P(x)\}$. En efecto, si no hay E en A con $P(E)$ entonces vacío; si hay E, definimos $P(x, y)$ dado por: si $P(x)$ entonces $y = x$ y si no entonces $y = E$, y aplicamos reemplazo en A. Existe la *intersección*: si A es no vacío entonces existe $\bigcap A = \{x \mid \forall B \in A(x \in B)\}$; ponemos $A \cap B = \bigcap\{A, B\}$ y tenemos: $A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y $A \cup (A \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. *Resta*: si A, B conjuntos existe $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$. *Diferencia simétrica*: si A, B conjuntos ponemos $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ y $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$, $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

Par ordenado: dados A, B definimos (A, B) como $\{\{A\}, \{A, B\}\}$ y tenemos $(A, B) = (C, D)$ sii $A = C$ y $B = D$. *Producto* de dos conjuntos: dados A, B definimos $A \times B$ como $\{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$; existe por especificación en $\mathcal{P}(A \cup B)$. Funciones: $f \in A \times B$ es *función* $f : A \to B$ sii $(\forall x \in A)(\exists! y \in B)((x, y) \in f)$; ese y se llama $f(x)$. El conjunto de las funciones $\{f \mid f : A \to B\}$ existe haciendo especificación en $A \times B$. Dado A hay una función $\mathrm{id}_A : A \to A$ dada por $\mathrm{id}_A(x) = x$ y se llama *identidad*. Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ definimos $g \circ f : A \to C$ dado por $g \circ f(x) = g(f(x))$; tenemos $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$; entonces los conjuntos con las funciones forman una categoría. Si $f : A \to B$ y $D \subset A$ definimos $f[D]$ o $f(D)$ (cuando no está la confusión $D \in A$) como $\{f(x) \mid x \in D\}$ o sea $\{y \in B \mid \exists x \in D(y = f(x))\}$, y si $D \subset B$ definimos $f^{-1}[D]$ o $f^{-1}(D)$ como $\{x \in A \mid f(x) \in D\}$; definimos la *imagen* de f, $\operatorname{im} f$, como $f[A]$. Decimos que $f : A \to B$ es *inyectiva* sii $\forall x, y \in A(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$, *sobreyectiva* sii $\operatorname{im} A = B$ y *biyectiva* sii es inyectiva y sobreyectiva. Se cumple: $f : A \to B$ es biyectiva sii existe $f^{-1} : B \to A$ con $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$. Sea I in conjunto y $i \mapsto A_i$ una función, lo cual también se dice sean $\{A_i\}_{i \in I}$ conjuntos; definimos $\bigcup_{i \in I} A_i$ como $\bigcup\{A_i \mid i \in I\}$. Tenemos las leyes de De Morgan: $A \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I}(A \setminus A_i)$ y $A \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I}(A \setminus A_i)$. Tenemos $f[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$, $f[\bigcap_{i \in I} A_i] \subset \bigcap_{i \in I} f[A_i]$, $f^{-1}[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[A_i]$ y $f^{-1}[\bigcap_{i \in I} A_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[A_i]$. Dado $\{A_i\}_{i \in I}$ definimos su *producto*, notado $\prod_{i \in I} A_i$, como $\{f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I(f(i) \in A_i)\}$, y las *proyecciones* $\pi_i : \prod_{i \in I} A_i \to A_i$ dadas por $\pi_i(f) = f(i)$. El *axioma de elección* dice que si $I \neq \emptyset$ y $\forall i \in I(A_i \neq \emptyset)$ entonces $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Definimos el *coproducto* $\coprod_{i \in I} A_i$ como $\{(i, a) \mid i \in I, a \in A_i\}$. Notamos A^B a $\prod_{b \in B} A$ o sea $\{f : B \to A\}$.

Una *relación* $\mathcal{R}$ entre elementos de A es un subconjunto de $A \times A$; $(x, y) \in \mathcal{R}$ se nota $x\mathcal{R}y$; $\mathcal{R}$ se dice *reflexiva* si $x\mathcal{R}x$; *simétrica* si $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$; *antisimétrica* si $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$; *transitiva* si $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x\mathcal{R}z$; *total* si $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$. Una relación reflexiva, simétrica y transitiva se dice *de equivalencia*. En este caso definimos la *proyección* $\pi : A \to \mathcal{P}(A)$ dada por $\pi(x) = \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}$ y tenemos $x\mathcal{R}y$ sii $\pi(x) = \pi(y)$ sii $\pi(x) \cap \pi(y) \neq \varnothing$. Decimos que $P \subset \mathcal{P}(A)$ es una partición de A sii $A = \bigcup P$ y para todos $X, Y \in P$ se tiene $X = Y$ o $X \cap Y = \varnothing$; tenemos $\{\pi(x) \mid x \in A\}$ es una particón de A que llamamos $A/\mathcal{R}$; los elementos de la partición se llaman *clases de equivalencia* de $\mathcal{R}$; recíprocamente si P es una partición de A podemos definir una relación de equivalencia $x\mathcal{R}y$ sii hay $D \in P$ con $x, y \in D$. Dada una función $f : A \to B$ definimos su *núcleo* $\ker f$ como la relación $\mathcal{R}$ dada por $x\mathcal{R}y$ sii $f(x) = f(y)$; es de equivalencia y toda relación de equivalencia es un núcleo: el de su proyección; f es inyectiva sii $\ker f$ es trivial o sea la igualdad. Una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva se dice un *orden*; una *cadena* es un orden total; si $D \subset A$, una *cota superior* es un $M \in A$ tal que $\forall x \in D(x\mathcal{R}M)$; se dice que M es un mínimo de $D \subset A$ sii es cota inferior y $M \in D$; si existe es único; $\mathcal{R}$ se dice un *buen orden* sii todo subconjunto no vacío de A tiene un mínimo.

Decimos que X es *inductivo*, y notamos $\Phi(x)$, queriendo decir que $\varnothing \in X \wedge \forall x \in X(x \cup \{x\} \in X)$. El *axioma del infinito* dice que hay un conjunto inductivo I. Veamos que existe $\mathbb{N}$, la intersección de todos los conjuntos inductivos, es decir, un conjunto tal que $\forall X(\Phi(X) \Rightarrow \omega \subset$

X); tomamos $\mathbb{N} = \{x \in I \mid \forall J(\Phi(J) \Rightarrow x \in J)\}$, cumple, es inductivo y es único. Lo llamamos el conjunto de los números naturales, llamamos 0 a $\varnothing$ y $n+1$ a $n \cup \{n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, decimos $n < m$ para decir $n \in m$ y $n \leqq m$ para decir $n = m$ o $n < m$; $\leqq$ resulta un buen orden. Esto va a permitir hablar de $\mathbb{N}$ como ordinal. Tenemos que si $n, m > 0$ entonces hay una inyectiva $n \to m$ sii $n \leqq m$, y por lo tanto una biyección sii $n = m$. Esto va a permitir hablar de los números naturales como cardinales.

Axioma de regularidad: para todo A no vacío hay $B \in A$ disjunto, o sea, con intersección vacía. En particular sigue que $X \notin X$, ya que si no $\{X\}$ contradice.

Ordinales y lema de Zorn Dado un conjunto bien ordenado $(X, \leqq)$ vamos a hablar de su orden estricto $<$ dado por $x < y$ sii $x \leqq y$ pero $x \neq y$; vamos a decir $X \in \mathcal{W}$ en vez de X es un conjunto bien ordenado. $X, Y \in \mathcal{W}$ se dicen *isomorfos* sii hay una biyección $\phi : X \to Y$ tal que $a < b \Rightarrow \phi(a) < \phi(b)$. Definimos $[a, b] = \{x \in X \mid a \leqq x \leqq b\}$; son bien ordenados. Si $X, Y \in \mathcal{W}$ definimos $X \oplus Y \in \mathcal{W}$ como el coproducto manteniendo el orden de X y de Y y poniendo todos los $x \in X$ como menores a todos los $y \in Y$. Tenemos que $\mathbb{N} \oplus 1$ no es isomorfo a $1 \oplus \mathbb{N}$, pero $\oplus$ sí es asociativa. Con el orden $(x_1, y_1) \leqq (x_2, y_2)$ sii $x_1 = y_1 \Rightarrow x_2 \leqq y_2$ y $x_1 \neq y_1 \Rightarrow x_1 \leqq y_1$ sobre $X \times Y$ definimos $X \otimes Y \in \mathcal{W}$ y de nuevo $\otimes$ es asociativa pero no conmutativa. Un *segmento inicial* es un conjunto $A \subset X$ tal que si $y < x$ y $x \in A$ entonces $y \in A$; se ve que es un $S_a = [\min X, a)$ para algún $a \in X \oplus \{\infty\}$. Si $A \subset X$ definimos el *supremo* de A como la mínima cota superior en $X \times \{\infty\}$. Si $x \in X$ definimos su *sucesor* como $\operatorname{suc}(x) = \min(x, \infty]$. Dado $x \in X$ o bien hay $y \in X$ con $x = \operatorname{suc}(y)$ o $x = \sup S_x$, o sea, dado $y < x$ hay z con $y < z < x$. *Inducción fuerte*: si $X \in \mathcal{W}$, P es una propiedad y $\forall x \in X((\forall y \in S_x(P(y))) \Rightarrow P(x))$ entonces $\forall x \in X(P(x))$. *Inducción transfinita*: si $P(\min X)$, además $P(x)$ implica $P(\operatorname{suc}(x))$ y además para todo x con $x = S_x$, $P(y)$ para todo $y < x$ implica $P(x)$, entonces para todo $x \in X$ vale $P(x)$. *Recursión transfinita*: si $X \in \mathcal{W}$, C conjunto, $\rho : \{f : S_x \to C \mid x \in X\} \to C$ es función entonces existe $f : X \to C$ tal que si $x \in X$, $f(x) = \rho(f \mid S_x)$ y es única; sale por inducción transfinita.

Si $X, Y \in \mathcal{W}$ un morfismo de X a Y es una función $\phi : X \to Y$ tal que $x < y \Rightarrow \phi(x) < \phi(y)$ y $\phi(X)$ es segmento inicial de Y. Si A es un segmento inicial de X entonces $\phi(A)$ es un segmento inicial de Y. Si hay un morfismo $X \to Y$ es único. X, Y son isomorfos sii hay morfismo $X \to Y$ y $Y \to X$. Si $X, Y \in \mathcal{W}$ hay morfismo $X \to Y$ o $Y \to X$: $a \in X \oplus \{\infty\}$ es bueno si hay $S_a \to Y$; si $A \subset X$ es bueno, $\sup A$ también; si $\forall x \in X(x \text{ bueno} \Rightarrow \operatorname{suc}(x) \text{ bueno})$ entonces por inducción todos son buenos y $X \to Y$; si no hay $a \in X$ con $S_a \to Y$ pero no hay $S_{\operatorname{suc}(a)} \to Y$, entonces $S_a \to Y$ es biyección y la inversa es $Y \to X$.

Un *ordinal* es un conjunto bien ordenado α tal que $\forall x \in \alpha(x = S_x)$ o sea $x = \{y < x\}$. Si α, β son dos ordinales, uno es subconjunto del otro y hereda la relación de orden: si hay morfismo $\phi : \alpha \to \beta$ por inducción se ve que es la inclusión $\phi(x) = x$. Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un ordinal y sólo uno, por inducción, viendo primero unicidad. Los ordinales están bien ordenados por el orden subconjunto en el sentido de que si P es una propiedad que se aplica a los ordinales y hay uno que la cumple entonces hay uno que la cumple y está contenido en todos los demás que la cumplen; el orden estricto es ser elemento, porque $\operatorname{suc}(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$. Un ordinal es el conjunto de los ordinales menores que él. La intersección de un conjunto de ordinales es su mínimo y la unión su supremo, ambos ordinales. *Inducción sobre ordinales*: si P es una propiedad, $P(\varnothing)$ vale, $P(\alpha) \Rightarrow P(\alpha \cup \{\alpha\})$ y dado $\alpha = \bigcup \beta \in \alpha\beta$, $\forall \beta \in \alpha(P(\beta)) \Rightarrow P(\alpha)$, entonces para todo ordinal α vale $P(\alpha)$. No existe el conjunto de todos los ordinales, porque si existiera sería un ordinal y estaría contenido en él mismo, lo que viola el axioma de regularidad.

Lema de Zorn. Si X es un conjunto parcialmente ordenado no vacío tal que toda cadena tiene una cota superior entonces tiene un elemento maximal, es decir, tal que no hay otro mayor. Por contradicción, si X no tiene elementos maximales, o sea que para todo x hay y con $x < y$, y toda cadena tiene cota superior, tiene cota estrictamente superior; en particular para todo C en el conjunto $\mathcal{C}$ de todas las cadenas bien ordenadas habría $z \in X$ con $\forall x \in C(x < z)$. Por el axioma de elección hay $g : \mathcal{C} \to X$ con $g(C)$ cota estrictamente superior de C. Ahora para todo ordinal α hay uno y sólo uno $C \in \mathcal{C}$ y un isomorfismo $\phi_\alpha : \alpha \to C$ tal que $\forall \beta \in \alpha(\phi_\alpha(\beta) = g(\phi_\alpha[\beta]))$; se prueba por inducción en los ordinales. Sea D el conjunto de los $C \in \mathcal{C}$ tales que existe un ordinal α y un morfismo $\phi_\alpha : \alpha \to C$ así; entonces para cada $C \in D$ hay exactamente un ordinal α que cumple; entonces por el axioma de reemplazo existe el conjunto de todos esos ordinales, uno para cada $C \in D$, pero vimos que son todos, luego existe el conjunto de todos los ordinales, absurdo.

Teorema del buen orden. Todo conjunto X admite un buen orden. Tomamos todos los buenos órdenes de subconjuntos de X o sea $(A, <)$ ordenados por $(A_1, <_1) < (A_2, <_2)$ sii $(A_1, <_1)$ es segmento inicial de $(A_2, <_2)$; dada una cadena, la unión es cota superior; por el lema de Zorn hay $(A, <)$ maximal; si $A \neq X$ hay $x \in X$ pero $A \oplus \{x\}$ le gana, absurdo.

Cardinales Dos conjuntos A y B se dicen *coordinables* si existe una función $A \to B$ biyectiva. Se nota $A \sim B$; es una relación de equivalencia. Un conjunto A es *finito* si existe $n \in \mathbb{N}$ con $A \sim n$; *infinito* si no. Es *numerable* si $A \sim \mathbb{N}$; *a lo sumo numerable* si es finito o numerable. Si A es infinito, B es numerable y $A \subset B$ entonces A es numerable, porque pongo B como secuencia y voy armando inductivamente la subsecuencia que es A. Si $A, B \sim \mathbb{N}$ entonces $A \times B \sim \mathbb{N}$. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos numerables, su unión es numerable.

Schröder-Bernstein. Sean A, B conjuntos, $f : A \to B$, $g : B \to A$ inyectivas; entonces $A \sim B$. Sea $C_0 = A - g(B)$ y $C_{n+1} = g(f(C_n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Sea $h : A \to B$ dado por $h(a)$ es $f(a)$ si $a \in C$ y $g^{-1}(a)$ si no (si $a \notin C$, $a \notin C_0$ así que $a \in g(B)$ así que como g es inyectiva $g^{-1}(a)$ está bien definido). Se ve que es una biyección.

Cantor. No hay una biyección $A \to \mathcal{P}(A)$. Si hubiera, sea $B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$ y sea $b \in A$ con $f(b) = B$. Absurdo.

Bernstein. Si A, B son conjuntos entonces hay una función inyectiva $A \to B$ o $B \to A$. Por el lema de Zorn: consideramos el conjunto $\{(a, b, f) \mid a \subset A, b \subset B, f : a \to b \text{ es biyectiva}\}$ con el orden $(a, b, f) \leqq (a', b', f')$ sii $a \subset a'$, $b \subset b'$ y $f \subset f'$; si C es una cadena $\{(a_i, b_i, f_i) \mid i \in I\}$ entonces $(\bigcup_{i\in I} a_i, \bigcup_{i\in I} b_i, \bigcup_{i\in I} f_i)$ es cota superior; entonces hay (A^*, B^*, f^*) maximal; si $A^* \neq A$ y $B \neq B^*$ podemos extender poniendo $A^* \cup \{x\}, B^* \cup \{y\}, f^* \cup \{(x, y)\}$, donde $x \in A - A^*, y \in B - B^*$, absurdo; si $A^* = A$ ya está; si $B^* = B$ entonces $(f^*)^{-1} : B \to A$ es inyectiva.

Cardinales. Definimos los *cardinales* como las clases de equivalencia de la relación $\sim$; el cardinal de A se nota $|A|$ y se pone $|n| = n$ y $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. Definimos un orden: $|A| \leqq |B|$ si y sólo si hay $A \to B$ inyectiva. Si $|A| = |B|$ entonces $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$, que lo llamamos potencia de $|A|$ y lo notamos $2^{|A|}$; tenemos $|A| \leqq 2^{|A|}$ pero no $2^{|A|} \leqq |A|$. Si $|A|$ y $|B|$ son dos cardinales definimos el *producto* $|A||B| = |A \times B|$ y la *suma* $|A| + |B| = |(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})|$. Se cumple: $ab = ba$, $a + b = b + a$, $(ab)c = a(bc)$, $(a + b) + c = a + (b + c)$, $a1 = a, a0 = 0$, $a + 0 = a$, $(a + b)c = ac + bc$, $a \leqq b \Rightarrow ac \leqq bc \wedge a + c \leqq b + c$. Definimos la *potencia* $|A|^{|B|} = |A^B|$. Cumple $a^b a^c = a^{b+d}$, $(a^b)^d = a^{bd}$, $(ab)^c = a^c b^c$, $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a \leqq b \Rightarrow a^c \leqq b^c \wedge c^a \leqq c^b$.

Suma de cardinales. Todo conjunto infinito A es unión disjunta de subconjuntos numerables, por el lema de Zorn sobre el conjunto de los conjuntos de subconjuntos numerables de A disjuntos con el orden inclusión. Todo conjunto infinito A se puede escribir como unión disjunta de subconjuntos $B \cup C$, los tres del mismo cardinal; es cuestión de partir A como antes, partir cada parte en dos (por ejemplo pares e impares), y pegarlas por separado. Si a, b son cardinales con $a \leqq b$ y b es infinito entonces $a + b = b$, porque $b \leqq a + b$ y $a + b \leqq b + b = b$.

Producto de dos cardinales. Si a es infinito entonces $aa = a$: primero lo vemos para $\aleph_0$ y luego, para ver que $|A \times A| = |A|$, usamos el lema de Zorn sobre los pares (B, f), donde $B \subset A$ y $f : B \to B \times B$ es biyectiva, con el orden dado por $(B, f) \leqq (B', f')$ sii $B \subset B'$ y $f \subset f'$; si

$\{(B_i, f_i) \mid i \in I\}$ es una cadena, $(\bigcup_{i\in I} B_i, \bigcup_{i\in I} f_i)$ es cota superior; como el conjunto es no vacío porque con numerables anda hay (B, f) maximal; sea $b = |B|$ y $c = |B - A|$; si $b \leqq c$ entonces hay $C \subset A - B$ con $b = |C|$, luego $(B\cup C)\times(B\cup C) = B\times B\cup(B\times C\cup C\times B\cup C\times C)$ así que se puede extender B a $B\cup C$ y f pegarla con una biyección entre C y $B\times C\cup C\times B\cup C\times C$, lo que contradice que (B, f) sea maximal; luego $c < b$ y $a = b + c = b$ así que $bb = b$ implica $aa = a$, como queríamos. Si $1 \leqq a \leqq b$ y b es infinito entonces $ab = b$, ya que $1 \leqq a \Rightarrow b \leqq ab$ y $ab \leqq bb = b$.

2 Análisis

Espacios topológicos Una *topología* sobre un conjunto no vacío X es una conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, el conjunto de *abiertos* de X, que cumple: $\varnothing, X \in \mathcal{F}$, si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A\cap B \in \mathcal{F}$ y si $C \subset \mathcal{F}$ entonces $\bigcup C \in \mathcal{F}$. Un *espacio topológico* es un par $(X, \mathcal{F})$, donde X es un conjunto y $\mathcal{F}$ es una topología sobre X. Si $x \in X$ decimos que $A \subset X$ es *entorno* de x si hay $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$ con $x \in \mathcal{U} \subset A$. Una familia de abiertos $\mathcal{B}$ se dice *base* si para todo abierto $A \subset X$ y todo $a \in A$ hay $B \in \mathcal{B}$ con $a \in B \subset A$. Se ve que $\mathcal{B}$ es base sii todo abierto es unión de abiertos de $\mathcal{B}$ y que, si para cada $x \in X$, E_x es una base de los entornos de x entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{x\in X} E_x$ es una base de X; si $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ cumple $X = \bigcup \mathcal{B}$ y $U, V \in \mathcal{B}$, $x \in U\cap V$ entonces hay $W \in \mathcal{B}$ con $x \in W \subset U\cap V$ se puede definir una única topología donde los abiertos son uniones de subconjuntos de $\mathcal{B}$. Una *subbase* es una familia de abiertos tales que el conjunto de sus intersecciones finitas es una base. Si S es una familia de subconjuntos de X entonces existe una única topología en X de la cual S es subbase: definimos $\mathcal{B}$ como el conjunto de las intersecciones finitas de conjuntos de S y vemos que $X \in \mathcal{B}$ y $U, V \in \mathcal{B} \Rightarrow U\cap V \in \mathcal{B}$.

Cerrados. Un conjunto $A \subset X$ se dice *cerrado* si $X \setminus A$ es abierto. Sea $A \subset X$. Si $a \in B \subset A$ con B abierto se dice que a es *punto interior* de A; llamamos *interior* de A al conjunto A° de sus puntos interiores y vemos que es el mayor abierto contenido en A. Si $a \in X$ cumple que todo entorno tiene intersección no vacía con A decimos que es *punto adherente* de A; definimos la *clausura* de A como el conjunto $\overline{A}$ de los puntos adherentes; se ve que es el menor cerrado que contiene a A. Se tiene $\overline{X\setminus A} = X\setminus A^\circ$. Definimos la *frontera* de A como $\partial A = \overline{A}\cap\overline{X\setminus A} = \overline{A}\setminus A^\circ$. Si todo entorno U de $a \in X$ cumple $(U\setminus\{x\})\cap A \neq \varnothing$ decimos que a es *punto de acumulación* de A; llamamos *conjunto derivado* de A al conjunto A' de los puntos de acumulación; se tiene $A' \subset \overline{A}$. Llamamos *puntos aislados* de A a los puntos de $A\setminus A'$. Decimos que $A \subset X$ es *denso* si $\overline{A} = X$. Un espacio es *de Baire* si la intersección numerable de abiertos densos es un conjunto denso, o, equivalentemente, si toda unión numerable de cerrados de interior vacío tiene interior vacío.

Funciones continuas. Si X e Y son espacios topológicos, $f : X \to Y$ se dice *continua* sii para todo $B \subset Y$ abierto se tiene que $f^{-1}(B) \subset X$ es abierto. Composición de continuas es continua. Un *homeomorfismo* es una biyección continua cuya inversa es continua, o sea continua, biyectiva y abierta, es decir, que manda abiertos en abiertos. Una función es *continua en un punto* x si para U entorno de $f(x)$ se cumple que $f^{-1}(U)$ es entorno de x; se ve que f es continua sii es continua en todo punto. Tenemos que f es continua sii: para todo abierto subbásico $B \subset Y$ se tiene $f^{-1}(B) \subset X$ es abierto; para todo cerrado $C \subset Y$ se tiene $f^{-1}(C) \subset X$ es cerrado; para todo $A \subset X$ se tiene $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$; para todo $B \subset Y$ se tiene $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$; para todo $B \subset Y$ se tiene $f^{-1}(B^\circ) \subset f^{-1}(B)^\circ$.

Subespacios. Sea $A \subset X$. Definimos la *topología relativa* a A como $\mathcal{F}_A = \{B\cap A \mid B \in \mathcal{F}\}$; se ve que $(A, \mathcal{F}_A)$ es un espacio topológico, que se dice *subespacio* de $(A, \mathcal{F})$. Claramente si $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{F}$ entonces $\{B\cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{F}_A$. Se tiene que $f : X \to Y$ es continua si y sólo si $f : X \to \operatorname{Im} f$ es continua. Si $A \subset X$ es subespacio, $f|_A$ es continua si y sólo si f es continua en todo punto de A. Lema de pegados: Si X es unión de abiertos, f es continua sii es continua en cada uno de ellos. Si A es unión finita de cerrados entonces f es continua sii es continua en cada uno de esos cerrados.

Topologías iniciales y finales. Si $\{(X_i, \mathcal{F}_i)\}_{i\in I}$ son espacios topológicos, Y un conjunto y $f_i : Y \to X_i$ funciones, definimos la *topología inicial* de Y como la que tiene por subbase a $\{f_i^{-1}(A_i) \mid A_i \in \mathcal{F}_i\}$, o sea la menor topología que las hace continuas a todas; se cumple que $g : Z \to Y$ es continua sii $f_i \circ g$ es continua para todo $i \in I$. Decimos que $\iota : Y \to X$ es *subespacio* si es final e inyectiva. Definimos la *topología producto* sobre $\prod_{i\in I} X_i$ como la topología inicial dada por las proyecciones. Tenemos que X_i es homeomorfo a un subespacio de $\prod_{i\in I} X_i$: tomamos $(x_i)_{i\in I}$ en el producto y ponemos $f : X_i \to \prod_{i\in I} X_i$ dada por $\pi_j f(x) = x_j$ si $i \neq j$ y $\pi_i f(x) = x$; es continua, inyectiva y $f : X_i \to f(X_i)$ es abierta así que homeomorfismo. Si $\{(X_i, \mathcal{F}_i)\}_{i\in I}$ son espacios topológicos, Y un conjunto y $f_i : X_i \to Y$ funciones, definimos la *topología final* de Y como la intersección de los conjuntos $\{A \subset Y \mid f_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{F}_i\}$, o sea la mayor topología que hace a todas las f_i continuas; $g : Y \to Z$ es continua sii $g \circ f_i$ es continua para todo $i \in I$. Si $p : X \to Y$ es final y sobreyectiva decimos que es *cociente*. Vale: si $p : X \to Y$ cociente y $f : X \to Z$ continua con $f(x) = f(y)$ si $p(x) = p(y)$ entonces hay $\overline{f} : Y \to Z$ continua con $f = \overline{f} \circ p$. Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre (X, T) con $p : X \to X/\mathcal{R}$ su proyección definimos la *topología cociente* de $X/\mathcal{R}$ como la final de p; p es cociente y si $p : X \to Y$ es cociente, Y tiene la topología de $X/\mathcal{R}$ dada por $x \,\mathcal{R}\, y$ sii $f(x) = f(y)$. Definimos la *topología de unión disjunta* sobre $\coprod_{i\in I} X_i$ como la final dada por las inclusiones $\iota_i : X_i \to \coprod_{i\in I} X_i$.

Pull-backs y push-outs. Si $X \xrightarrow{f} Z$, $Y \xrightarrow{g} Z$, decimos que $W \xrightarrow{\bar{f}} Y$ y $W \xrightarrow{\bar{g}} Z$ son un *pull-back* si $f\bar{g} = g\bar{f}$ y dadas otras flechas $W' \xrightarrow{\bar{f}'} Y$ y $W' \xrightarrow{\bar{g}'} Z$ hay una única flecha $W' \xrightarrow{\phi} W$ tal que conmuta el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[dr, dotted, "\phi"] \arrow[drr, bend left, "\bar{g}'"] \arrow[ddr, bend right, "\bar{f}'"'] & & \\
& W \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Siempre existe pull-back y es único salvo isomorfismo: es $\{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ con la topología de subespacio de $X \times Y$ y $\bar{f} = \pi_X, \bar{g} = \pi_Y$. Dados $Z \xrightarrow{f} X$ y $Z \xrightarrow{g} Y$ se define dualmente el *push-out*, y también existe y es único salvo isomorfismo: es $(X \amalg Y)/\{f(z) \sim g(z)\}$.

Hausdorff. Un espacio X se dice *de Hausdorff* sii dados $x, y \in X$ distintos hay abiertos U, V disjuntos con $x \in U, y \in V$. Se ve que todo conjunto finito en un espacio de Hausdorff es cerrado, todo producto de espacios de Hausdorff es de Hausdorff y que un espacio es de Hausdorff si y sólo si la diagonal $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$. Si $f, g : X \to Y$ son continuas, $D \subset X$ es denso tal que $f|_D = g|_D$ y Y es de Hausdorff entonces $f = g$: sea $h : X \to Y \times Y$ dada por $x \mapsto (f(x), g(x))$; es continua y $h(D) \subset \Delta$; luego $h(X) = h(\overline{D}) \subset \overline{h(D)} \subset \Delta$, de donde $f = g$.

Categoría. Si X es un espacio topológico se dice que $A \subset X$ es *nunca denso* si el interior de su clausura es vacío, esto es, si $X \smallsetminus A$ contiene un abierto denso. Se dice que $A \subset X$ es de *primera categoría* si es una unión numerable de conjuntos nunca densos. Un espacio es *de Baire* si los conjuntos de primera categoría tienen interior vacío, es decir, si la intersección numerable de abiertos densos es un conjunto denso, o, equivalentemente, si toda unión numerable de cerrados de interior vacío tiene interior vacío. Los conjuntos que no son de primera categoría se dice que son de *segunda categoría*; en conclusión los espacios de Baire son conjuntos de segunda categoría.

Límites de funciones. Sean X, Y espacios, $A \subset X$, $a \in \overline{A}$ y $b \in Y$; si $f : A \to Y$ decimos que el *límite* de f tendiendo a a es b si poniendo $f(a) = b$ resulta que f es continua en a. Si Y es Hausdorff el límite es único: si f tiende a b y a b' tomamos entornos disjuntos V, V' de v, v', hay U, U' entornos de a tales que $x \in U \cap U' \smallsetminus \{a\}$ va a V y a V' al mismo tiempo, absurdo. Entonces se justifica la notación $\lim_{x\to a} f(x) = b$. El límite en a de una función no depende de $f(a)$, pero sí depende de cómo esté definida f en algún entorno de a. Tenemos que si $f : X \to Y$ tiene límite en a y $g : Y \to Z$ es continua entonces $g(\lim_{x\to a} f(x)) = \lim_{x\to a} g(f(x))$. Notamos $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in B}} f(x)$ a $\lim_{x\to a} f|_B(x)$. Lo siguiente es útil para calcular límites: si $A = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ y a es de acumulación de todos esos conjuntos entonces existe $\lim_{x\to a} f(x)$ sii existen $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in B_i}} f(x)$ y todos coinciden.

Redes y filtros. Un *conjunto dirigido* es un conjunto Γ con un orden $\leqq$ tal que si $\alpha, \beta \in \Gamma$ hay $\gamma \in \Gamma$ con $\alpha, \beta \leqq \gamma$. Una *red* es una función $\Gamma \to X$ o sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$; decimos que *converge* a $x \in X$, o $x_\alpha \to x$, si para todo entorno $\mathcal{U}$ de x hay $\alpha_0 \in \Gamma$ con $\alpha \geqq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in \mathcal{U}$. Un *filtro* es una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X) \smallsetminus \{\varnothing\}$ cerrada por intersecciones finitas y tal que si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subset B$ entonces $B \in \mathcal{F}$. Decimos que $\mathcal{F}$ *converge* a x si todo entorno de x está en $\mathcal{F}$. Dada una red x_α los conjuntos A tales que $x_\alpha \in A$ si $\alpha \geqq \alpha_0$ forman un filtro; dado un filtro $\mathcal{F}$, ordenamos $\Gamma = \{(a, A) \mid a \in A, A \in \mathcal{F}\}$ por $(a, A) \leqq (b, B) \Leftrightarrow B \subset A$, ponemos $x_{(a,A)} = a$ y obtenemos una red; convergencia de la red y del filtro coinciden. Si $A \subset X$ entonces $x \in \overline{A}$ sii hay red $x_\alpha \to x$ con $x_\alpha \in A$. Tenemos que $f : X \to Y$ es continua en x sii para toda red $x_\alpha \to x$ se cumple $f(x_\alpha) \to f(x)$. Hausdorff sii $x_\alpha \to x$ y $x_\alpha \to y$ implican $x = y$. Una *subred* de x_α es una red x_{α_β} que viene de una función α_β con β en un conjunto dirigido tales que dado α_0 hay β_0 con $\beta \geqq \beta_0 \Rightarrow \alpha_\beta \geqq \alpha_0$; obvio que $x_{\alpha_\beta} \to x$ si $x_\alpha \to x$. Si $\mathcal{F}$ es un filtro tal que $A \in \mathcal{F} \Rightarrow (\forall\alpha_0)(\exists\alpha \geqq \alpha_0)x_\alpha \in A$, entonces hay una subred x_{α_β} tal que $\mathcal{F}$ está en su filtro, es decir, si $A \in \mathcal{F}$, $x_\alpha \in A$ si $\alpha \geqq \alpha_0$ (tomamos $\{(\alpha, A) \mid \alpha \in \Gamma, A \in \mathcal{F}, x_\alpha \in A\}$ ordenado por $(\alpha_1, A_1) \leqq (\alpha_2, A_2)$ sii $\alpha_1 \leqq \alpha_2$ y $A_1 \supset A_2$ y es un conjunto dirigido; ponemos $\alpha_{(\alpha_0,A)} = \alpha_0$ y x_{α_β} cumple). Un *ultrafiltro* $\mathcal{F}$ es un filtro maximal (bajo la inclusión), es decir, tal que para todo $A \subset X$ vale $A \in \mathcal{F}$ o $X \smallsetminus A \in \mathcal{F}$. Todo filtro está contenido en un ultrafiltro (por Zorn). Una red se dice *universal* si para todo $A \subset X$ hay α_0 con $x_\alpha \in A$ para todo $\alpha \geqq \alpha_0$ o $x_\alpha \in X \smallsetminus A$ para todo $\alpha \geqq \alpha_0$. Toda red x_α tiene una subred universal (sea $P = \{A \mid (\forall\alpha_0)(\exists\alpha \geqq \alpha_0)x_\alpha \in A\}$; entre los filtros $\mathcal{F} \subset P$ tomamos uno maximal, $\mathcal{F}$, por Zorn; vemos que es ultrafiltro: si $A \subset X$ entonces o bien $(\forall B \in \mathcal{F})(B \cap A \in P)$ o $(\forall B \in \mathcal{F})(B \smallsetminus A \in P)$; en el primer caso A se puede agregar a $\mathcal{F}$ así que por maximalidad $A \in \mathcal{F}$; en el segundo $X \smallsetminus A \in \mathcal{F}$; tomamos una subred filtrada por $\mathcal{F}$ y terminamos).

Numerabilidad, separación, conexión Un espacio X cumple el *primer axioma de numerabilidad*, 1AN, si todo $x \in X$ tiene una base numerable de entornos, es decir, un conjunto $\mathcal{B}$ de entornos tales que si $\mathcal{U}$ es entorno hay $B \in \mathcal{B}$ con $B \subset \mathcal{U}$. En ese caso de toda red convergente $x_\alpha \to x$ se puede extraer una sucesión convergente $x_n \to x$ que es subred. Entonces $x \in \overline{A}$ sii hay una sucesión de A que converge a x, y f es continua en x sii para toda sucesión convergente $x_n \to x$ tenemos $f(x_n) \to f(x)$. Decimos que X cumple el *segundo axioma de numerabilidad*, 2AN, si tiene una base numerable; basta con subbase numerable. Subespacio y producto numerable de 1AN es 1AN; subespacio y producto numerable de 2AN es 2AN. Decimos que X es de *Lindelöf* si todo cubrimiento por abiertos tiene un subcubrimiento numerable y *separable* si tiene un conjunto denso a lo sumo numerable. Tenemos 2AN implica Lindelöf y separable.

Decimos que X es T_0 sii todo par de puntos son topológicamente distinguibles, es decir, hay un abierto que contiene a uno y no al otro; X es T_1 si $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$, que implica T_0; T_2 es Hausdorff e implica T_1. Decimos que X es *regular* si para todo cerrado $F \subset X$ y todo $x \notin F$ hay abiertos disjuntos U, V con $x \in U$ y $F \subset V$; T_3 es T_2 y regular. X es *completamente regular* si para todo cerrado $F \subset X$ y todo $x \notin F$ hay $f : X \to [0, 1]$ con $f(x) = 0$ y $f|_F = 1$; *Tychonoff* o $T_{3\frac{1}{2}}$ es completamente regular y T_2. X es *normal* si para todos los cerrados $A, B \subset X$ disjuntos hay abiertos disjuntos U, V con $A \subset U, B \subset V$; T_4 es normal y T_2. Lema de Urysohn dice que si X es normal y A, B son cerrados disjuntos hay $f : X \to [0,1]$ con $f|_A = 0$ y $f|_B = 1$. Idea: para cada racional de $[0,1]$ construimos un abierto $\mathcal{U}_p$, inductivamente, de manera que $A \subset \mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1 = B^c$ y $p < q \Rightarrow \overline{\mathcal{U}_p} \subset \mathcal{U}_q$; después ponemos $f(x) = \inf\{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \mid x \in \mathcal{U}_p\}$. Esto implica $T_4 \Rightarrow$ Tychonoff $\Rightarrow T_3$. Vale que subespacio y producto de $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$ también es, pero no para T_4. Por ejemplo si $(X_i)_{i\in I}$ son completamente regulares también $\prod_{i\in I} X_i$: sea $x \in F^c$, F cerrado, entonces $x \in \bigcap_{i\in J} \pi_i^{-1}(U_i) \subset F^c$ con J finito; para cada $i \in J$ tomamos $f_i : X_i \to [0,1]$ con $f_i(x_i) = 1$ y $f_i(U_i^c) = \{0\}$ y $f(x) = \prod_{i\in J} f_i(\pi_i(x))$ cumple. Si X es regular con base numerable entonces es normal: sean A, B cerrados disjuntos; para cada $x \in A$ hay abiertos U_x, V_x disjuntos, $x \in U_x$, U_x básico, $B \subset V_x$, y $\overline{U_x} \subset V_x^c$; entonces hay numerables abiertos $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $A \subset \bigcup_{n\in N} U_n$ y $\overline{U_n} \cap B = \varnothing$; igualmente hay abiertos $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ y $\overline{V_n} \cap A = \varnothing$; tomamos $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(U_n \cap \bigcap_{i=1}^n \overline{V_i}^c)$ y $V = \bigcup_{n\in N}(V_n \cap \bigcap_{i=1}^n \overline{U_i}^c)$ y listo.

Tietze. Si X es normal, $A \subset X$ cerrado y $f : A \to \mathbb{R}$ continua hay una extensión $\overline{f} : X \to \mathbb{R}$ continua. Basta verlo para $\operatorname{im} f \subset [-1,1]$ (componiendo con homeomorfismo $\mathbb{R} \to (-1,1)$). Por Urysohn hay $f_1 : X \to \mathbb{R}$ continua con $f_1|_{f^{-1}([-1,-\frac{1}{3}])} = -\frac{1}{3}$ y $f_1|_{f^{-1}([\frac{1}{3},1])} = \frac{1}{3}$; en el resto tanto f como f_1 están en $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ así que $|f(x) - f_1(x)| \leqq \frac{2}{3}$ para todo $x \in A$. Repetimos el argumento sobre $f - f_1$ y obtenemos $f_2 : X \to [-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}]$ con $|f(x) - f_1(x) - f_2(x)| \leqq (\frac{2}{3})^2$ en $x \in A$; siguiendo así encontramos funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ continuas con $|f_n(x)| \leqq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ y $|f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x)| \leqq (\frac{2}{3})^N$ para $x \in A$. La función $\overline{f} = \sum_{n=1}^\infty f_n$ funciona por completitud de $CB(X,\mathbb{R})$.

Conexión. Un espacio topológico X es *disconexo* si hay dos abiertos no vacíos U, V con $X = U \cup V$ pero $U \cap V = \varnothing$; se dice *conexo* si no. Esto es equivalente a decir que los únicos subconjuntos abiertos y cerrados son X y $\varnothing$. Si $f : X \to Y$ es continua y X es conexo entonces $f(X)$ es conexo. Si A es conexo entonces $\overline{A}$ es conexo. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de subespacios conexos de X tales que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$ entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es conexo. Luego si $x \in X$ y $C(x)$ es la unión de los conjuntos de subespacios $A \subset X$ con $x \in A$ conexos entonces $C(x)$ es conexo, el mayor conexo que contiene a x; se denota la *componente conexa* de x. Resulta que todo espacio se puede partir en componentes conexas, que son cerradas, ya que $\overline{C(x)}$ es conexo y contiene a x, luego $\overline{C(x)} \subset C(x)$. El espacio se dice *totalmente disconexo* si sus componentes conexas son sus puntos. El espacio se dice *localmente conexo* si tiene una base formada por conexos. En ese caso las componentes conexas son abiertas también.

Arco-conexión. Un *arco* en X es una aplicación continua $a : [0,1] \to X$; X se dice *arco-conexo* si para todo par de puntos $x, y \in X$ hay un arco a con $a(0) = x$, $a(1) = y$. Obviamente arco-conexión implica conexión porque $\operatorname{Im} a$ es conexo así que los extremos están en la misma componente conexa. La relación $x \sim y$ sii hay un arco de x e y se verifica que es de equivalencia; las clases de equivalencia se llaman *componentes arco-conexas*. Un espacio se dice *localmente arco-conexo* si tiene una base formada por arco-conexos. En ese caso un abierto es conexo sii es arco-conexo: si A es un abierto conexo no vacío hay que ver que es arco-conexo; las componentes arco-conexas son abiertas; luego si $x, y \in A$ no están conectados sus componentes muestran que A es disconexo.

Convexidad. Supongamos que A es un $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ espacio vectorial en el que las operaciones son continuas. Un conjunto A se dice *convexo* si para todos $x, y \in A$ se tiene que el *segmento* $\{\lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in [0,1]\} \subset A$; en particular es arco-conexo. Intersección de convexos es convexa; la clausura de convexos es convexa. Una *poligonal* es la concatenación de un número finito de segmentos; un espacio es conexo por poligonales sii todo par de puntos se puede unir por una poligonal. Un espacio se dice *localmente convexo* si tiene una base formada por convexos. En ese caso un abierto es conexo sii es conexo por poligonales.

Compacidad Un espacio X se dice *compacto* si dados abiertos $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ con $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ existe $J \subset I$ finito con $X = \bigcup_{j\in J} \mathcal{U}_i$, es decir, que de todo cubrimiento por abiertos se puede extraer un subcubrimiento finito o, equivalentemente, que dados cerrados $\{F_i\}_{i\in I}$ con la propiedad de intersección finita, esto es, que $\bigcap_{i\in J} F_i \neq \varnothing$ para todo $J \subset I$ finito, entonces $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$. Equivalente: toda red tiene una subred convergente (tomamos la red x_α universal; los $F_{\alpha_0} = \{x_\alpha \mid \alpha \geqq \alpha_0\}$ tienen intersección finita no vacía así que hay x en todos, o sea que para todo entorno A de x y todo α_0 hay $\alpha \geqq \alpha_0$ con $x_\alpha \in A$; si no $x_\alpha \to x$ hay A con $(\forall\alpha_0)(\exists\alpha \geqq \alpha_0)x_\alpha \notin A$, así que por def de red universal $(\exists\alpha_0)(\forall\alpha \geqq \alpha_0)x_\alpha \in X \smallsetminus A$, absurdo; para la otra implicación sean $\{F_i\}_{i\in I}$ cerrados con $\bigcap_{i\in J} F_i \neq \varnothing$ para todo $J \subset I$ finito; ordenamos el conjunto de los $J \subset I$ finitos por inclusión, para cada J tomamos (por axioma de elección) $x_J \in \bigcap_{i\in J} F_i$, tomamos una subred convergente $x_{J_\alpha} \to x$ y $x \in \bigcap_{i\in I} F_i$). Un subespacio $K \subset X$ es compacto sii dados abiertos $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ de X con $K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ hay $J \subset I$ finito con $K \subset \bigcup_{i\in J} \mathcal{U}_i$; $K \subset X$ se dice *relativamente compacto* si $\overline{K}$ es compacto. Si X es compacto y $K \subset X$ es cerrado entonces es compacto. $K \subset X$ finito es compacto y unión finita de compactos es compacto. Si $f : X \to Y$ es continua y X es compacto, $f(X)$ es compacto. Si X es Hausdorff y $A, B \subset X$ son compactos disjuntos entonces hay abiertos $U, V \subset X$ disjuntos con $A \subset U, B \subset V$; si A es compacto entonces es cerrado; intersección de compactos es compacto; si X es compacto, es T_4. Si $f : X \to Y$ es continua, X compacto y Y Hausdorff entonces es cerrada; si además es biyectiva entonces es homeo.

Subbase de Alexander. Si X tiene una subbase $\mathcal{B}$ tal que siempre que $X = \bigcup C$ con $C \subset \mathcal{B}$ hay $D \subset C$ finito con $X = \bigcup D$ entonces X es compacto. Si X no es compacto, sea $\mathcal{T}$ el conjunto de abiertos y $\mathcal{F}$ el conjunto de los $C \subset \mathcal{T}$ con $X = \bigcup C$ pero si $D \subset C$ finito, $X \neq \bigcup D$, ordenado por la inclusión. Por Zorn tiene un elemento maximal C. Tenemos que $C \cap \mathcal{B}$ no cubre, entonces hay $x \in X$ fuera de $\bigcup(C \cap \mathcal{B})$. Sea $U \in C$ con $x \in U$, y $x \in S_1 \cap \cdots \cap S_n \subset U$, $S_i \in \mathcal{B}$. Los S_i no están en $\mathcal{B}$, luego $C \cup \{S_i\}$ por maximalidad tiene que tener subcubrimiento finito $C_i \cup \{S_i\}$. Ahora $C_1 \cup \cdots \cup C_n \cup \{U\}$ es un subcubrimiento finito de C, listo.

Tychonoff. El producto de espacios compactos es compacto. Sea $\prod_{i\in I} X_i$ el producto y x_α una red universal. Las redes $\pi_i(x_\alpha)$ son universales en X_i y convergen a x_i. Si $x \in \prod_{i\in I} X_i$ tal que $\pi_i(x) = x_i$, como $\pi_i(x_\alpha) \to \pi_i(x)$ para todo $i \in I$, $x_\alpha \to x$, como queríamos. También por subbase de Alexander: si $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \pi_{i_\alpha}^{-1}(U_\alpha)$, dado $i \in I$ partician $\pi_i^{-1}(U_\alpha)$ con $\alpha \in \Lambda_i$; si hay $i \in I$ con $X_i = \bigcup_{\alpha\in\Lambda_i} U_\alpha$, tomamos un subcubrimiento (compacidad de X_i) y los $\pi_i^{-1}(U_j)$ cubren X; si no, para cada $i \in I$ hay x_i con $x_i \notin \bigcup_{\alpha\in\Lambda_i} U_\alpha$, luego $(x_i) \notin \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \pi_{i_\alpha}^{-1}(U_\alpha)$, absurdo.

Compacidad local. X se dice *localmente compacto* si todo punto tiene un entorno compacto. X de Hausdorff es localmente compacto sii para todo entorno $\mathcal{U}$ de x hay un entorno compacto $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$: hay que ver que si $x \in \mathcal{U} \subset K$ con $\mathcal{U}$ abierto y K compacto hay V abierto con $x \in V \subset \overline{V} \subset \mathcal{U}$, pero $K \cap \mathcal{U}^c$ es compacto y $\{x\}$ es compacto así que hay W_1, W_2 abiertos disjuntos con $x \in W_1$ y $K \cap \mathcal{U}^c \subset W_2$ así que, con $V = W_1 \cap \mathcal{U} \subset K$, como W_2^c es cerrado, $\overline{V} \subset W_2^c \subset K^c \cup \mathcal{U}$ y además $\overline{V} \subset K$, así que $\overline{V} \subset \mathcal{U}$ y listo. Todo espacio de Hausdorff localmente compacto es T_4 y de Baire: sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección contable de abiertos densos; hay que mostrar que su intersección es un conjunto denso, o sea que si W es un abierto no vacío entonces hay $x \in W \cap \bigcap_{i\in N} U_i$; ahora hay compactos no vacíos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y abiertos $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $V_1 \subset C_1 \subset W \cap U_1$, $V_{n+1} \subset C_{n+1} \subset V_n \cap U_{n+1}$ y $C_{n+1} \subset C_n$; luego su intersección es no vacía y $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$ implica $x \in C_1 \subset W \cap U_1$, $x \in C_{n+1} \subset V_n \cap U_{n+1} \subset U_{n+1}$ y $x \in W \cap \bigcap_{i\in N} U_i$.

Ley exponencial. Sea $C(X, Y)$ el espacio de las funciones continuas $X \to Y$ con la *topología compacto-abierta*, viz la dada por la subbase $\mathcal{U}_{K,U} = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset U\}$, donde K recorre los compactos de X y U los abiertos de Y. Vale: si Y es localmente compacto Hausdorff entonces $f : X \times Y \to Z$ es continua sii $\hat{f} : X \to C(Y, Z)$ dada por $\hat{f}(x) = (y \mapsto f(x, y))$ es continua. Además $\mathrm{ev} : C(X, Y) \times X \to Y$, $\mathrm{ev}(f, x) = f(x)$, es continua.

Compactificación de un punto de Alexandroff. Una *compactificación* de X es un subespacio $\iota : X \to X'$ con X' compacto y $\iota(X) \subset X'$ denso. Dado X definimos la *compactificación de Alexandroff* como $X' = X \cup \{\infty\}$ cuyos abiertos son los de X junto a $K^c \cup \{\infty\}$ donde K

recorre los compactos cerrados; es compactificación si X no es compacto. Es Hausdorff sii X es localmente compacto Hausdorff.

Compactificación de Stone-Čech. Dado X definimos $\iota : X \to [0,1]^{C(X,[0,1])}$ dado por $\iota(x) = (f(x))_f$ y la *compactificación de Stone-Čech* de X es $\iota : X \to \beta X = \overline{\iota(X)}$; βX es compacto Hausdorff por ser subespacio cerrado de compacto por Tychonoff; ι es compactificación sii X es Tychonoff ($T_{3\frac{1}{2}}$). Vale la propiedad que lo caracteriza salvo isomorfismo: todo $f : X \to K$, con K compacto Hausdorff, se levanta de manera única a $\beta f : \beta X \to K$ con $f = \beta f \circ \iota$.

Stone-Weierstrass. Si X es un conjunto, un *álgebra de funciones* sobre k es un conjunto $A \subset k^X$ tal que $f, g \in A \Rightarrow f + g \in A, fg \in A, cf \in A$; se dice *autoadjunta* si además $\overline{f} \in A$; se dice que separa puntos si para todos $x, y \in X$ hay $f \in A$ con $f(x) \neq f(y)$. El teorema dice que si X es compacto y $A \subset C(X, \mathbb{F})$ es un álgebra de funciones autoadjunta, que separa puntos y contiene a las constantes entonces $\overline{A} = C(X, \mathbb{F})$. Primero para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Hay una secuencia de polinomios reales que en $[0,1]$ converge uniformemente a $\sqrt{t}$: ponemos $u_0 = 0$ y $u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}(t - u_n(t)^2)$; por inducción $u_n(t) \leqq \sqrt{t}$ y $u_n \leqq u_{n+1}$; se ve la convergencia puntual a $v(t)$ porque $\{u_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona y acotada; se ve que $v(t) = \sqrt{t}$; entonces se ve que converge uniformemente. Ahora si $f \in A$ sigue que $|f| \in \overline{A}$, porque $u_n(f^2/\|f\|) \in A$ convergen uniformemente a $|f|/\|f\|$. Entonces si $f, g \in \overline{A}$ entonces $\min\{f, g\}$ y $\max\{f, g\}$ también: como $\overline{A}$ también es un álgebra, usamos las fórmulas $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ y $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$. Para $x, y \in X$ distintos y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ hay $f \in \overline{A}$ tal que $f(x) = \alpha, f(y) = \beta$: hay $g \in A$ que los separa; tomamos $f = \alpha + (\beta - \alpha)(g - \gamma)/(\delta - \gamma)$, donde $\gamma = g(x)$ y $\delta = g(y)$. Si $f \in C(X, \mathbb{R})$, $x \in X$ y $\epsilon > 0$, hay $g \in \overline{A}$ tal que $g(x) = f(x)$ y $g(y) \leqq f(x) + \epsilon$ para todo $y \in X$: para cada $z \in X$ sea h_z tal que $h_z(x) = f(x)$ y $h_z(z) = f(z)$; hay un entorno $V(z)$ tal que $y \in V(z) \Rightarrow h_z(y) \leqq f(y) + \epsilon$; cubrimos X con finitos $V(z_i)$; la función $g = \min_i f(z_i)$ está en $\overline{A}$ y cumple. Finalmente $\overline{A} = C(X, \mathbb{R})$: sea $f \in C(X, \mathbb{R})$; para cada $\epsilon > 0$ y cada $x \in X$ hay $g_x \in \overline{A}$ tal que $g_x(x) = f(x)$ y $g_x(y) \leqq f(y) + \epsilon$; entonces hay entorno $U(x)$ tal que $y \in U(x) \Rightarrow g_x(y) \geqq f(y) - \epsilon$; cubrimos X con finitos $U(x_i)$; entonces $\phi = \max_i g_{x_i}$ está en $\overline{A}$ y cumple que $f(y) - \epsilon \leqq g(y) \leqq f(y) + \epsilon$; entonces $f \in \overline{A}$. Ahora $k = \mathbb{C}$ sale porque $f \in A \Rightarrow \frac{1}{2}(f + \overline{f}), \frac{1}{2}(f - \overline{f}) \in A$; entonces A contiene una álgebra real densa y $C(X, \mathbb{R}) \subset \overline{A}$, así que $f + gi$ está y listo. Casos particulares: si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto entonces los polinomios en n variables son densos en $CB(K, \mathbb{R})$; los polinomios trigonométricos, el subálgebra generada por $e^{\pi i t}$ y $e^{-\pi i t}$, son densos en $C([0,1], \mathbb{C})$. Si X es métrico compacto entonces los espacios $C(X, \mathbb{R})$ y $C(X, \mathbb{C})$ son separables: basta verlo para $\mathbb{R}$; hay una base numerable $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; el subálgebra generada por $g_n(t) = d(t, X \setminus U_n)$ cumple.

Números reales Decimos que una secuencia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de racionales es *de Cauchy* si para todo $\epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ hay $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geqq n_0$ vale $|a_n - a_m| < \epsilon$. Definimos una relación entre las secuencias de Cauchy: $(a_n) \sim (b_n)$ sii para todo $\epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ hay $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqq n_0$ vale $|a_n - b_n| < \epsilon$. Se ve que es de equivalencia; sea $\mathbb{R}$ el conjunto de las clases de equivalencia. Tenemos la inmersión $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ dada por $a \mapsto \overline{(a)}$. Vamos a darle estructura de cuerpo.

Cuerpo ordenado. Definimos la suma así: $\overline{(a_n)} + \overline{(b_n)} = \overline{(a_n + b_n)}$; se ve que está bien definida, que $a + b = b + a$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ y $a + 0 = 0 + a = a$. Definimos el opuesto así: $-\overline{(a_n)} = \overline{(-a_n)}$; también se ve la buena definición y que $(-a) + a = a + (-a) = 0$. Definimos la multiplicación: $\overline{(a_n)} \cdot \overline{(b_n)} = \overline{(a_n b_n)}$; usando que las sucesiones son acotadas por ser de Cauchy se ve la buena definición. Tenemos también $ab = ba$, $a(bc) = (ab)c$, $a(b + c) = ab + bc$, $(a + b)c = ac + bc$. Si $\overline{(a_n)} \neq 0$ definimos $\overline{(a_n)}^{-1}$ así: le sacamos los ceros a (a_n) (que son finitos), invertimos los términos y tomamos clase de equivalencia; se ve la buena definición porque si $\overline{(a_n)} \neq 0$ entonces a partir de un punto no tiene ceros. Tenemos que si $a \neq 0$ entonces $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Ahora definimos un orden así: $a \geqq b$ sii $a_n \geqq b_n$ para n grande; ponemos $a < b$ si no $a \geqq b$; se ve la buena definición. Tenemos que si $a \geqq b$ entonces $a + c \geqq b + c$,

$-a \geqq -b$ y $ac \geqq bc$ si $c \geqq 0$. Definimos $|a|$ como a si $a \geqq 0$ y $-a$ si no. Se tiene $|ab| = |a||b|$ y $|a| + |b| \geqq |a + b|$. Notemos que si x es real hay racionales x_n con $|x - x_n|$ arbitrariamente cerca; en particular hay $n \in \mathbb{N}$ con $n > x$.

Topología. Podemos definir una distancia entre reales $d(a, b)$ dada por $|a - b|$ que cumple $d(a, b) \geqq 0$ con igualdad sii $a = b$, $d(a, b) = d(b, a)$ y $d(a, b) \leqq d(a, c) + d(c, b)$; podemos definir las bolas $B_\epsilon(a) = \{b \in \mathbb{R} \mid d(a, b) < \epsilon\}$ y darle una topología a $\mathbb{R}$ a partir de la base formada por $B_\epsilon(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y cada $\epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ (hay que ver que si $c \in B_{\epsilon_1}(a) \cap B_{\epsilon_2}(b)$ hay ϵ_3 con $B_{\epsilon_3}(c) \subset B_{\epsilon_1}(a) \cap B_{\epsilon_2}(b)$). Se ve que las operaciones son continuas, que es de Hausdorff y obviamente todo punto tiene una base de entornos numerable. Como todo $x \in \mathbb{R}$ tiene una sucesión en $\mathbb{Q}$ que converge a x se ve que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Completitud. Veamos que toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ converge. Sea $a_n = \overline{(a_{nm})_n}$ de Cauchy; veamos que hay $a^* \in \mathbb{R}$ con $a_n \to a^*$. Dado $n \in \mathbb{N}$ hay m_n tal que si $m \geqq m_n$ vale $|a_{nm_n} - a_{nm}| < \frac{1}{n}$; pongo $a^* = \overline{(a_{nm_n})_n}$. Veamos que $(a_{nm_n})_n$ es de Cauchy: $|a_{nm_n} - a_{n'm_{n'}}| \leqq |a_{nm_n} - a_{nt}| + |a_{nt} - a_{n't}| + |a_{n't} - a_{n'm_{n'}}| < \epsilon$ si n, n' son grandes de manera que $|a_n - a'_n| < \frac{\epsilon}{3}$ y t es grande para que $|a_{nt} - a_{n't}| < \frac{\epsilon}{3}$ y $t \geqq m_n, m_{n'}$. Veamos que $a_k \to a^*$: $|a_{kn} - a_{nm_n}| \leqq |a_{kn} - a_{kt}| + |a_{kt} - a_{nt}| + |a_{nt} - a_{nm_n}| < \epsilon$ si k, n son grandes para que $|a_k - a_n| < \frac{\epsilon}{3}$, n, t grandes para que $|a_{kn} - a_{kt}| < \frac{\epsilon}{3}$, y $t \geqq m_n$. Escribiendo los reales en binario se ve que $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

Supremo e ínfimo. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío; decimos que M es cota superior si $a \leqq M$ para todo $a \in A$; supongamos que A tiene una cota superior. Sea M el conjunto de cotas superiores de A y B el conjunto de reales x tales que hay $a \in A$ con $x \leqq a$. Sea $a_0 \in B$ y $m_0 \in M$; si $n \in \mathbb{N}$, consideramos la sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dada por $x_0 = a_0, x_{i+1} = (x_i + m_n)/2$; si $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset B$ entonces m_n es mínimo de M; si no, ponemos $a_{n+1} = x_j \in B$ y $m_{n+1} = x_{j+1} \in M$ y tenemos $|a_{n+1} - m_{n+1}| \leqq \frac{1}{2}|a_n - m_n|$; en el límite m_n se vuelve el máximo de M. Probamos pues que existe una menor cota superior, que se llama *supremo*. Similarmente si un conjunto no vacío está acotado inferiormente tiene una máxima cota inferior que se le llama *ínfimo*.

Límites superiores e inferiores. Ponemos $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; extendemos el orden; le damos una topología a través de la base de los intervalos abiertos $(a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\}$ y $\overline{\mathbb{R}}$. Ahora todo conjunto no vacío tiene supremo e ínfimo: si es acotado es el real; si no, es $+\infty$ o $-\infty$ según el caso. Dada una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ el conjunto de puntos adherentes en $\overline{\mathbb{R}}$ es nunca vacío: si es no acotada entonces $-\infty$ o ∞; si es acotada tiene una subsucesión monótona (por Ramsey infinito), que converge claramente a su supremo o ínfimo, según sea creciente o decreciente; entonces podemos definir el *límite superior* $\limsup_n a_n$ o $\overline{\lim_n} a_n$ como el supremo de los puntos adherentes y el *límite inferior* $\liminf_n a_n$ o $\underline{\lim_n} a_n$ como el ínfimo. Se cumple que $\limsup_n a_n = \inf_{n_0 \in \mathbb{N}} \sup_{n \geqq n_0} a_n$ y $\liminf_n a_n = \sup_{n_0 \in \mathbb{N}} \inf_{n \geqq n_0} a_n$. En efecto, sea $L = \inf_{n_0 \in \mathbb{N}} \sup_{n \geqq n_0} a_n$; es claro que $\limsup_n a_n \leqq L$; ahora sea $\epsilon > 0$; hay $n_0 \in \mathbb{N}$ con $L \leqq \sup_{n \geqq n_0} a_n < L + \epsilon$; entonces hay $n \in \mathbb{N}$ con $\sup_{n \geqq n_0} a_n - \epsilon < a_n \leqq \sup_{n \geqq n_0} a_n$ y $L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$, por lo que L es punto límite y $L \leqq \liminf_n a_n$.

Compacidad. Veamos que $[-M, M]$ es compacto. Lo cubrimos por abiertos y sea A el conjunto de los $x \in [-M, M]$ tales que se puede extraer un subcubrimiento finito en $[-M, x]$; claramente $-M \in A$; miramos el supremo y llegamos a contradicción. Esto implica que todo cerrado y acotado es compacto. Se ve la recíproca. Como las funciones continuas mandan compactos a compactos resulta que toda función continua de $X \subset \mathbb{R}$ compacto a $\mathbb{R}$ tiene imagen acotada. Entonces tiene supremo e ínfimo y usando que es cerrada vemos que tiene mínimo y máximo.

Conexión. Veamos que $A \subset \mathbb{R}$ es conexo sii es un intervalo. Las bolas son convexas así que $\mathbb{R}$ es localmente convexo; luego A es conexo sii es conexo por poligonales, sii es un intervalo. Una consecuencia es que si X es un espacio topológico conexo, $f : X \to \mathbb{R}$ es continua,

$f(x) = a, f(y) = c$ y $a < b < c$ entonces hay $z \in X$ con $f(z) = b$. Otra consecuencia es que si $f : I \to \mathbb{R}$ es continua, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y es estrictamente monótona entonces es un homeomorfismo $f : I \to \operatorname{Im} f$. En particular los polinomios de grado impar tienen al menos una raíz.

Logaritmos y exponenciales. Para todo número $a > 1$ y $x > 0$ hay $m \in \mathbb{Z}$ con $a^m \leqq x \leqq a^{m+1}$. Sea A_x el conjunto de los racionales m/n con $n \geqq 1$ tales que $a^m \leqq x^n$; sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sup A_x$; se comprueba que $f(xy) = f(x) + f(y)$, que es continua, que es estrictamente creciente, que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, luego su inversa es continua. Se llama *logaritmo* en base a; se nota $\log_a$; su inversa se llama *función exponencial* y se nota $x \mapsto a^x$.

Grupo fundamental y revestimientos De aquí en más las funciones son continuas y $I = [0,1]$. Decimos que $f, g : X \to Y$ son *homotópicas* si hay una *homotopía* $H : f \simeq g$, que es una función $H : X \times I \to Y$ con $H(-,0) = f$ y $H(-,1) = g$. Es relación de equivalencia (con $H_f^f(-,t) = f$, $H_g^f(x,t) = H_f^g(x, 1-t)$ y $H_f^h(x,t) = \begin{cases} H_f^g(x,2t), \text{ si } x \in [0,\frac{1}{2}] \\ H_g^h(x,2t-1), \text{ si } x \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$), y si $f \simeq g$ entonces $fh \simeq gh$ (con $\tilde{H}(x,t) = H(h(x),t)$) y $hf \simeq hg$ (con $\tilde{H} = hH$). Si $\gamma, \gamma' : I \to X$ son caminos, decimos que son *homotópicos como caminos*, $\gamma \simeq_p \gamma'$, si hay una homotopía $H : \gamma \simeq \gamma'$ con $H(0,-)$ y $H(1,-)$ constantes. Dados caminos γ, γ' definimos la *composición de caminos* $\gamma * \gamma'$ como el camino $t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t), \text{ si } t \in [0,\frac{1}{2}] \\ \gamma'(2t-1), \text{ si } t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$ y el *camino inverso* $\bar{\gamma}$ dado por $t \mapsto \gamma(1-t)$; vale $(\gamma * \gamma') * \gamma'' \simeq_p \gamma * (\gamma' * \gamma'')$, $\gamma * \mathrm{cte}_{\gamma(1)} \simeq_p \mathrm{cte}_{\gamma(0)} * \gamma \simeq_p \gamma$, $\gamma * \bar{\gamma} \simeq_p \mathrm{cte}_{\gamma(0)}$, $\gamma * \varphi \simeq_p \gamma' * \varphi'$ si $\gamma \simeq_p \gamma'$ y $\varphi \simeq_p \varphi'$, $\bar{\gamma} \simeq_p \bar{\gamma}'$ si $\gamma \simeq_p \gamma'$, $f(\gamma * \gamma') = f\gamma * f\gamma'$ y $f(\bar{\gamma}) = \overline{f(\gamma)}$.

Un *lazo* en x_0 es un camino ω con $\omega(0) = \omega(1) = x_0$. Definimos $\pi_1(X, x_0)$, el *grupo fundamental* de X en x_0, como el conjunto de lazos en x_0 cocientado por $\simeq_p$ con la operación $[\omega] * [\omega'] = [\omega * \omega']$, $[\omega]^{-1} = [\bar{\omega}]$ y unidad $[\mathrm{cte}_{x_0}]$. Si α es un camino de x_0 a x_1, $\hat{\alpha}[\omega] = [\bar{\alpha} * \omega * \alpha]$ es un isomorfismo de grupos $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$; esto implica que el π_1 sólo depende (salvo isomorfismo) de la componente arcoconexa de x_0. Dada $f : X \to Y$ definimos $f_*^{x_0} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ por $f_*[\omega] = [f\omega]$; vale $(gf)_*^{x_0} = g_*^{f(x_0)} f_*^{x_0}$; $f : X \to Y$ se dice *equivalencia homotópica* si hay $g : Y \to X$ con $fg \simeq \mathrm{id}_Y$ y $gf \simeq \mathrm{id}_X$; en ese caso $f_*^{x_0}$ es un isomorfismo (sean $\alpha = H_{gf}^{\mathrm{id}_x}(x_0, -)$ y $\alpha' = H_{fg}^{\mathrm{id}_Y}(f(x_0), -)$; se ve $\hat{\alpha} g_*^{f(x_0)} f_*^{x_0} = \mathrm{id}$ y $\hat{\alpha}' f_*^{gf(x_0)} g_*^{f(x_0)} = \mathrm{id}$; como $\hat{\alpha}$ y $\hat{\alpha}'$ son iso, $g_*^{f(x_0)}$ es sobre y mono, luego iso, y luego $f_*^{x_0}$ es iso). X se dice *simplemente conexo* si es arcoconexo y $\pi_1(X) = 0$. Todo convexo es simplemente conexo porque si $x_0 \in X$, $r : X \to \{x_0\}$ es equivalencia homotópica con $H_r^{\mathrm{id}_X}(x,t) = tx + (1-t)x_0$.

Van Kampen. Si $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ con X_i abiertos, $X_i \cap X_j \cap X_k$ arcoconexo para todos i, j, k, y $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$, entonces $\pi_1(X, x)$ es el producto libre de los $\pi_1(X_i, x)$ cocientado por las relaciones $[\omega]_i \sim [\omega]_j$ con ω lazo en $X_i \cap X_j$, $[\omega]_i \in \pi_1(X_i, x)$ y $[\omega]_j \in \pi_1(X_j, x)$. Esto es equivalente a: dados morfismos $f_i : \pi_1(X_i, x) \to G$ tales que si $\iota_*^i : \pi_1(X_i \cap X_j, x) \to \pi_1(X_i, x)$ y $\iota_*^j : \pi_1(X_i \cap X_j, x) \to \pi_1(X_j, x)$ son inclusiones entonces $f_i \iota_*^i = f_j \iota_*^j$, entonces existe un único morfismo $f : \pi_1(X, x) \to G$ tal que para todo i si $\iota_* : \pi_1(X_i, x) \to \pi_1(X, x)$ es la inclusión entonces $f_i = f\iota_*$. Todo lazo ω es equiv a $\omega_1 * \cdots * \omega_n$ con ω_j lazo en X_{i_j} (gracias a su arcoconexión), entonces ponemos $f([\omega]) = f_{i_1}([\omega_1]) \cdots f_{i_n}([\omega_n])$; hay que ver que está bien definida, esto es, si $\omega_1 * \cdots * \omega_n \simeq_p \omega_1' * \cdots * \omega_{n'}'$ entonces obtenemos el mismo resultado; tomamos una homotopía H, partimos $I \times I$ en rectangulitos con $H|_R \subset X_i$ en cada R, para algún i, hacemos que los vértices de cada rectangulito estén en como mucho tres rectangulitos, y vamos transformando el lazo de abajo en el de arriba en pasitos que preservan f, haciendo que cada segmentito sea un lazo en $X_i \cap X_j \cap X_k$ (posible gracias a su arcoconexión, yendo de x y luego volviendo). Consecuencia: $\pi_1(S^n) = 0$ si $n \geqq 2$: $S^n = (S^n \setminus \{p\}) \cup \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ entorno de p homeomorfo a una bola de $\mathbb{R}^n$; $S^n \setminus \{p\}$ es homeo a $\mathbb{R}^n$; $(S^n \setminus \{p\}) \cap \mathcal{U} = \mathcal{U} \setminus \{p\}$ homeo a bola de $\mathbb{R}^n$ pinchada, que es arcoconexa si $n \geqq 2$; como $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$ y $\pi_1(B) = 0$, resulta $\pi_1(S^n) = 0$.

Un *revestimiento* $p : \tilde{X} \to X$ es una función sobre tal que si $x \in X$ hay $U \subset X$ entorno abierto de x *parejamente cubierto*, viz tal que $p^{-1}(U) = \coprod_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$ con V_α abiertos y $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ homeos. Si $p : \tilde{X} \to X$ revestimiento, Y conexo, $f, g : Y \to \tilde{X}$ con $pf = pg$ y $f(y_0) = g(y_0)$, entonces $f = g$ (hay que ver que $A = \{y \in Y \mid f(y) = g(y)\}$ es abierto y cerrado; si $y \in A$ hay V entorno abierto de $f(y)$ con $p|_V$ homeo, luego $U = f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V)$ cumple $p|_V f|_U = p|_V g|_U$, luego $f|_U = g|_U$ y $U \subset A$; si $y \notin A$, hay V, V' abiertos disjuntos en $\tilde{X}$ con $f(y) \in V, g(y) \in V'$ luego $U = f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V')$ cumple $f(U) \cap g(U) = \varnothing$ y $U \subset A^c$). Una *fibración* $p : \tilde{X} \to X$ es una función tal que si $f : Y \to \tilde{X}$ y $H : Y \times I \to X$ con $pf = H(-, 0)$, hay $\tilde{H} : Y \times I \to \tilde{X}$ con $f = \tilde{H}(-, 0)$ y $H = p\tilde{H}$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_0"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{H}"] & X \end{tikzcd}$$

Todo revestimiento es fibración (para todo $y \in Y$ construimos N_y entorno abierto y $\tilde{H}_y : N_y \times I \to \tilde{X}$ con $p\tilde{H}_y = H|_{N_y \times I}$ y $\tilde{H}_y(-, t) = f|_{N_y}$; se pegan bien por el teorema anterior; dado $y \in Y$, tomo entornos parejamente cubiertos del camino $H(y, -) : I \to X$, y por compacidad de I hay una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ con $H(\{y\} \times [t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$ con U_i abierto parejamente cubierto, tomo N_y abierto tal que $y \in N_y$ y $H(N_y \times [t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$ y voy armando $\tilde{H}|_{N_y \times [t_{i-1}, t_i]}$ en base a la anterior y a que $\tilde{H}|_{N_y \times \{0\}} = f|_{N_y}$, tomando el abierto $V \subset \tilde{X}$ con $p|_V : V \to U_i$ homeo y $\tilde{H}(N_y \times \{t_{i-1}\}) \subset V$, quizás achicando N_y en el camino para que pase eso, y poniendo $\tilde{H}|_{N_y \times [t_{i-1}, t_i]} = p|_V^{-1} H|_{N_y \times [t_{i-1}, t_i]}$). Si $p : \tilde{X} \to X$ es revestimiento, $p_*^{x_0}$ es monomorfismo (hay que ver que $p\omega \simeq_p p\omega'$ implica $\omega \simeq \omega'$; levantamos $H : p\omega \simeq p\omega'$ a $\tilde{H} : \omega \simeq \omega''$; ahora $p\tilde{H}(0, -) = p\tilde{H}(1, -) = p\mathrm{cte}_{x_0}$ y coinciden en 0, luego $\tilde{H}(0, -) = \tilde{H}(1, -) = \mathrm{cte}_{x_0}$; ahora $p\omega'' = p\omega'$ y coinciden en las puntas, luego $\omega'' = \omega'$ y $\tilde{H}$ es $\omega \simeq_p \omega'$, listo). Todo camino γ en X se levanta de manera única a un camino $\tilde{\gamma}^{\tilde{x}_0}$ en X' con $p\tilde{\gamma}^{\tilde{x}_0} = \gamma$ y $\tilde{\gamma}^{\tilde{x}_0}(0) = \tilde{x}_0$; vale $\tilde{\gamma}^{\tilde{x}_0} \simeq_p \tilde{\gamma}'^{\tilde{x}_0}$ si $\gamma \simeq_p \gamma'$, $\widetilde{\gamma * \gamma'}^{\tilde{x}_0} = \tilde{\gamma}^{\tilde{x}_0} * \tilde{\gamma}'^{\tilde{\gamma}^{\tilde{x}_0}(1)}$ y $\tilde{\bar{\gamma}}^{\tilde{x}_0} = \overline{\tilde{\gamma}^{\tilde{\bar{\gamma}}^{\tilde{x}_0}(1)}}$; entonces $\pi_1(X, x_0)$ actúa sobre la fibra $p^{-1}(x_0)$ con $[\omega] \cdot \tilde{x}_0 = \tilde{\omega}^{\tilde{x}_0}(1)$; así que hay una biyección entre $\pi_1(X, x_0)/p_*^{\tilde{x}_0}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ y los puntos de $p^{-1}(x_0)$ en la misma componente arcoconexa de $\tilde{x}_0$. Tenemos que $p : \mathbb{R} \to S^1$ dado por $p(t) = e^{2\pi i t}$ es un revestimiento, la biyección es $\pi_1(S^1, 1) \leftrightarrow \mathbb{Z}$, se ve que es morfismo y resulta $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Aplicaciones. Dado $f : S^1 \to X$, $f \simeq \mathrm{cte}_{x_0}$ sii f se extiende a $f : B^2 \to X$ sii f_* es trivial; consecuencia: ni id_{S^1} ni la inclusión $i : S^1 \to \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ son nulhomotópicas. Dada $f : B^2 \to \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$, hay $x \in S^1$ con $f(x) = \lambda x$, $\lambda > 0$ (si no pasa, $H(x, t) = tx - (1-t)f(x)$ sería $-f|_{S^1} \simeq \mathrm{id}_{S^1}$, luego f no sería nulhomotópica y no podría extenderse a B^2, absurdo). Brouwer: $f : B^2 \to B^2$ tiene punto fijo (si no tiene, $f(x) - x$ cumple lo anterior y hay $x \in S^1$ con $f(x) = (1 + \lambda)x$, luego $|f(x)| > 1$, absurdo). Borsuk-Ulam: si $f : S^1 \to S^1$ cumple $f(-x) = -f(x)$ entonces no es nulhomotópica (puedo asumir aplicando una rotación que $f(1) = 1$; $q : S^1 \to S^1$ dada por $q(z) = z^2$ es un revestimiento y cociente por la relación $z \sim -z$; vale $qf(z) = qf(-z)$, luego hay $g : S^1 \to S^1$ con $gq = qf$; el camino $\tilde{\alpha}(t) = e^{\pi i t}$ va de 1 a -1; $\alpha = q\tilde{\alpha}$ es un lazo; $g_*^1[\alpha] = [gq\tilde{\alpha}] = [qf\tilde{\alpha}] \neq 0$ porque $f\tilde{\alpha}$ va de 1 a -1; luego $g_* \neq 0$ y se ve que $f_* \neq 0$). Borsuk-Ulam en S^2: si $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ hay x con $f(x) = f(-x)$ (si no $g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$ sería $S^2 \to S^1$ con $g(x) = -g(-x)$ pero su restricción a S^1 sería nulhomotópica, absurdo).

Levantamiento de funciones a revestimientos. Si $p : \tilde{X} \to X$ es un revestimiento con $p(\tilde{x}_0) = x_0$ y $f : Y \to X$ con $f(y_0) = x_0$ y Y arcoconexo y localmente arconexo, entonces existe $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ con $p\tilde{f} = f$ y $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ sii $f_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$; en ese caso $\tilde{f}$ es única (si existe $\tilde{f}$, $f_*\pi_1(Y, y_0) = p_*\tilde{f}_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$; si pasa eso, para cada $y \in Y$ tomamos γ camino $y_0 \rightsquigarrow y$ y ponemos $\tilde{f}(y) = \widetilde{f\gamma}^{\tilde{x}_0}(1)$; está bien definida porque si $\gamma, \gamma' : y_0 \rightsquigarrow y$, $f(\gamma * \bar{\gamma}')$ es lazo en x_0, luego como $f_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ su levantado en $\tilde{x}_0$ es lazo y se ve que

$\widetilde{f\gamma}^{\tilde{x}_0}(1) = \widetilde{f\gamma'}^{\tilde{x}_0}(1)$; $\tilde{f}$ continua: si $y \in Y$ sea U entorno de $\tilde{f}(y)$ con $p|_U$ homeo y V entorno de y arcoconexo con $f(V) \subset p(U)$; hay que ver $\tilde{f}(V) \subset U$; si $y_1 \in V$ hay $\gamma : y \rightsquigarrow y_1$ en V, luego $f\gamma$ en $p(U)$ se levanta a $\widetilde{f\gamma}^{\tilde{f}(y)}$ en U; ahora $f(y_0 \rightsquigarrow y \rightsquigarrow y_1)$ se levanta a $\tilde{x}_0 \rightsquigarrow \tilde{f}(y) \rightsquigarrow \tilde{f}(y_1)$ y $\tilde{f}(y_1) = \widetilde{f\gamma}^{\tilde{f}(y)}(1) \in U$).

Transformaciones deck. Si $p : \tilde{X} \to X$ es un revestimiento, $\tilde{X}$ arcoconexo y localmente arcoconexo, una *transformación deck* es un homeomorfismo $\phi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tal que $p = p\phi$; forman un grupo $G_{\tilde{X}}$. Por lo anterior para todos $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1$ con $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$ y $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ hay una única transformación deck con $\phi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Si $H = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ y $N = \{[\omega] \in \pi_1(X, x_0) \mid [\omega]^{-1}H[\omega] = H\}$ hay un isomorfismo $N/H \to G_{\tilde{X}}$ dado por $[[\omega]] \mapsto \phi_{[\omega]} \in G_{\tilde{X}} \mid \phi_{[\omega]}(\tilde{x}_0) = [\omega] \cdot \tilde{x}_0$ (bien definida porque $\pi_1(\tilde{X}, [\omega] \cdot \tilde{x}_0) = [\tilde{\omega}^{\tilde{x}_0}]^{-1}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[\tilde{\omega}^{\tilde{x}_0}]$ y lo anterior; morfismo porque si $[\omega], [\omega'] \in N$, aplicarle $\phi_{[\omega]}$ a $\tilde{\omega}'^{\tilde{x}_0} : \tilde{x}_0 \rightsquigarrow \tilde{\omega}'^{\tilde{x}_0}(1)$ da un levantado de $\tilde{\omega}'$ que sale de $\phi_{[\omega]}(\tilde{x}_0) = \tilde{\omega}^{\tilde{x}_0}(1)$, es decir, da $\tilde{\omega}'^{\tilde{\omega}^{\tilde{x}_0}(1)}$, cuyo fin es $\widetilde{\omega * \omega'}^{\tilde{x}_0}(1)$, y $\phi_{[\omega*\omega']}(\tilde{x}_0) = \phi_{[\omega]}\phi_{[\omega']}(x_0)$; suryectiva porque si $\phi \in G_{\tilde{X}}$, $\tilde{x}_1 = \phi(\tilde{x}_0)$, α camino de $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}_1$, $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = \{[\bar{\alpha} * \omega * \alpha] \mid [\omega] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)\}$, $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = [p\alpha]^{-1}p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[p\alpha]$ y $\phi(\tilde{x}_0) = [p\alpha] \cdot \tilde{x}_0$).

Revestimiento universal. Si X es arcoconexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo (viz que si $x \in X$ hay U ab, $x \in U$, con $\iota_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ es cero) entonces existe revestimiento $p : \tilde{X} \to X$ con $\tilde{X}$ simplemente conexo. Primero vemos que $\mathcal{B} = \{U \subset X \mid U$ abierto arcoconexo y $\iota_* : \pi_1(U) \to \pi_1(X)$ cero$\}$ es base. Fijamos $x_0 \in X$ y ponemos $\tilde{X}$ como el conjunto de caminos de x_0 cocientado por $\simeq_p$ y $p : \tilde{X} \to X$ dado por $p[\gamma] = \gamma(1)$. Le damos topología a $\tilde{X}$ con la base formada por los $U_{[\gamma]} = \{[\gamma * \eta] \mid \eta$ camino en U con $\eta(0) = \gamma(1)\}$, donde U recorre $\mathcal{B}$ y $[\gamma] \in \tilde{X}$ con $\gamma(1) \in U$. Se ve que $p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \to U$ es biyectiva (por cómo está definido $\mathcal{B}$). Vemos que p es revestimiento: es abierta (se ve sobre la base pero $p(U_{[\gamma]}) = U$), es continua (si $[\gamma] \in \tilde{X}$, $U \in \mathcal{B}$ entorno de $p[\gamma]$, $p(U_{[\gamma]}) = U$), $p^{-1}(U) = \coprod U_{[\gamma]}$ si $U \in \mathcal{B}$, porque si $U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']} \neq \varnothing$, $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$. Vemos que $\tilde{X}$ es arcoconexo: si $[\gamma] \in \tilde{X}$ vemos que $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{X}$ dado por $t \mapsto \left[s \mapsto \begin{cases} \gamma(s), \text{ si } s \in [0,t] \\ \gamma(t), \text{ si } s \in [t,1] \end{cases}\right]$ es un camino de $[\mathrm{cte}_{x_0}]$ a $[\gamma]$. Veamos $\pi_1(\tilde{X}) = 0$: si $\tilde{\gamma}$ lazo en $[\mathrm{cte}_{x_0}]$, $\gamma = p\tilde{\gamma}$ lazo en x_0, y $t \mapsto \left[s \mapsto \begin{cases} \gamma(s), \text{ si } s \in [0,t] \\ \gamma(t), \text{ si } s \in [t,1] \end{cases}\right]$ lo levanta en $[\mathrm{cte}_{x_0}]$, luego es $\tilde{\gamma}$, pero va a $[\gamma]$, así que $[\gamma] = [\mathrm{cte}_{x_0}]$, $p_*[\tilde{\gamma}] = 0$ y $[\tilde{\gamma}] = 0$ por p_* mono, listo.

Clasificación de revestimientos. Si $p : \tilde{X} \to X$ es universal, viz $\pi_1(\tilde{X}) = 0$, $\pi_1(X) \cong G_{\tilde{X}}$ vía $[\omega] \mapsto \phi_{[\omega]}$, y $H \leq G_{\tilde{X}}$, que es $\{\phi_{[\omega]}\}_{[\omega] \in H^* \leq \pi_1(X)}$, actúa sobre $\tilde{X}$ de manera que $q : \tilde{X} \to \tilde{X}/H$ (las órbitas, con la topología final) es un revestimiento y $p_H : \tilde{X}/H \to X$ dada por $p = p_H q$ es revestimiento, con $p_{H*}\pi_1(\tilde{X}/H) = H^*$. Dos revestimientos $p : \tilde{X} \to X$, $p' : \tilde{X}' \to X$ se dicen equivalentes si hay un homeo $\phi : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ con $p = p'\phi$. Si X es arcoconexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo, hay una biyección entre las clases de equivalencia de los revestimientos arcoconexos $p : \tilde{X} \to X$ y las clases de conjugación de los subgrupos de $\pi_1(X)$, dada por $[p] \mapsto [p_*\pi_1(\tilde{X})]$.

Homología El *n-símplex* Δ^n se define como la cápsula convexa de la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Dado un espacio topológico X definimos $C_n(X)$, para $n \geqq -1$, como $G^{(C(\Delta^n, X))}$, con G un grupo abeliano, y $C_{-1}(X) = 0$; los elementos de $C_n(X)$ se llaman *cadenas*. Definimos el *morfismo de borde* $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ por $d_n(\sigma) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \sigma|_{[v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$; los elementos de su núcleo se llaman *ciclos* y los de su imagen *bordes*. Tenemos $d_n d_{n+1} = 0$, luego $\operatorname{im} d_{n+1} \subset \ker d_n$ y podemos definir la *homología singular* $H_n(X) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}$. Poniendo $C_{-1}(X) = G$ y $d_0(\sum_{i \in I} a_i \sigma_i) = \sum_{i \in I} a_i$ formamos los grupos de *homología reducida* $\tilde{H}_n(X)$, y tenemos $H_0(X) \cong \begin{cases} \tilde{H}_0(X) \oplus G \text{ si } X \neq \varnothing \\ \tilde{H}_0(X) \cong 0 \text{ si } X = \varnothing \end{cases}$, $\tilde{H}_{-1}(X) \cong \begin{cases} 0 \text{ si } X \neq \varnothing \\ G \text{ si } X = \varnothing \end{cases}$; el resto iguales. Si $X = \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es una descomposición en componentes conexas entonces $H_n(X) = \bigoplus_{\alpha \in A} H_n(X_\alpha)$. $H_0(X) \cong G^{(\mathcal{C})}$, donde $\mathcal{C}$ recorre las componentes arcoconexas. Si X es un punto, $\tilde{H}_n(X) = 0$ para todo n. Una función $f : X \to Y$ continua induce morfismos $\tilde{f}_n : C_n(X) \to C_n(Y)$ por $\tilde{f}(\sigma) = f\sigma$, y se tiene $\tilde{f}_{n-1}d_n = d_n\tilde{f}_n$, por lo que hay un morfismo $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ con $f_*[\sigma] = [f\sigma]$; vale $(fg)_* = f_*g_*$ y $\mathrm{id}_{X*} = \mathrm{id}_{H(X)}$. Decimos que $\tilde{f}_n, \tilde{g}_n : C_n(X) \to C_n(Y)$ son *homotópicos* si hay $h_n : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ con $\tilde{g}_n - \tilde{f}_n = d_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n$; implica $f_* = g_*$. Si $f, g : X \to Y$ son homotópicas, $\tilde{f}, \tilde{g}$ también (dado n, sean $v_i = (e_i, 0)$ y $w_i = (e_i, 1)$ para $i = 0, \ldots, n$; si $H : X \times I \to Y$ es homotopía $f \simeq g$, $h_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i H(\sigma \times \mathrm{id}_I)|_{[v_0,\ldots,v_i,w_i,\ldots,w_n]}$ es homotopía $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$). En particular, si $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica, $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ es un isomorfismo. De acá sale que $\tilde{H}_n(\mathbb{R}^n) = 0$ para todo n.

Mayer-Vietoris [sd]. Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de X, defino $C_*^{\mathcal{U}}(X) \subset C_*(X)$ como el subcomplejo generado por $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} C(\Delta^*, U)$; vale (teorema) que $i : C_*^{\mathcal{U}}(X) \to C_*(X)$ es un retracto por deformación fuerte, es decir, existe $r : C_*(X) \to C_*^{\mathcal{U}}(X)$ tal que $ri = \mathrm{id}$, $ir \simeq \mathrm{id}$; en particular $i_* : H_n^{\mathcal{U}}(X) \to H_n(X)$ es iso. Si $\mathcal{U} = \{U, V\}$ tenemos la sucesión exacta corta $0 \to C_*(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} C_*(U) \oplus C_*(V) \xrightarrow{\beta} C_*^{\mathcal{U}}(X) \to 0$, con $\alpha(\sigma) = (\sigma, -\sigma)$ y $\beta(\tau, \eta) = \tau + \eta$, que induce la sucesión exacta larga (usando el teorema) $\cdots \to H_n(U \cap V) \xrightarrow{\alpha_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\beta_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(U \cap V) \to \cdots$. Aplicación: $\tilde{H}_n(S^n) = \left\{\begin{smallmatrix}\mathbb{Z} \text{ si } k=n \\ 0 \text{ si } k\neq n\end{smallmatrix}\right.$ (tomo $U = S^n \setminus \{e_1\}$, $V = S^n \setminus \{e_2\}$ y $U \cap V \simeq S^{n-1}$, $U, V \simeq \mathbb{R}^n$); corolario: $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no son homeomorfos si $n \neq m$. Brouwer: $f : D^n \to D^n$ tiene un punto fijo (la recta $\lambda x + (1-\lambda)f(x)$ corta a S^{n-1} en un punto con $\lambda \geqq 1$, lo que define una retracción $r : D^n \to S^{n-1}$, imposible viendo H_{n-1}). Si X es homeo a D^k entonces $\tilde{H}_i(S^n \setminus X) = 0$ y si X es homeo a S^k con $k < n$ entonces $\tilde{H}_i(S^n \setminus X) = \left\{\begin{smallmatrix}\mathbb{Z} \text{ si } i=n-k-1 \\ 0 \text{ si no}\end{smallmatrix}\right.$. Curva de Jordan: si $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva entonces $\mathbb{R}^n \setminus f(S^{n-1})$ tiene dos componentes conexas. Si $X \cong S^n$ y $X \subset S^n$ entonces $X = S^n$; son imposibles $X \subset \mathbb{R}^n$ y $X \subset S^m$ para $m < n$; si $X \cong \mathbb{R}^n$ entonces es imposible $X \subset \mathbb{R}^m$ para $m < n$. Invarianza de dominio: si $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ inyectiva entonces $f(U)$ es abierto.

Homología relativa. Si $A \subset X$ es subespacio, definimos $C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$ y $H_n(X, A)$ sus grupos de homología; la sucesión exacta corta $0 \to C_*(A) \to C_*(X) \to C_*(X, A) \to 0$ induce una sucesión exacta larga sobre los grupos de homología: $\cdots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \to \cdots$. Escisión I: si $Z \subset A \subset X$, A abierto, Z cerrado, la inclusión $i : (X \setminus Z, A \setminus Z) \to (X, A)$ induce un iso $i_* : H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \to H_n(X, A)$. Escisión II: si $X = A \cup B$, A, B abiertos, la inclusión $i : (B, A \cap B) \to (X, A)$ induce un iso $i_* : H_n(B, A \cap B) \to H_n(X, A)$. Invarianza de dimensión: si $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ son abiertos homeomorfos entonces $n = m$.

Espacios métricos Un *espacio métrico* es un conjunto X y una distancia $d : X^2 \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ que cumple: $d(x, y) = 0$ sii $x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$ y $d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y)$. Si X, Y son espacios métricos, una *inmersión métrica* es una función $f : X \to Y$ tal que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para todos $x, y \in X$; si es sobreyectiva entonces es biyectiva y se dice *isometría*; los espacios métricos forman una categoría con las inmersiones métricas. Si X es un conjunto, M es un espacio métrico y $f : X \to M$ es una función podemos darle una métrica a X dada por $d(x, y) = d(f(x), f(y))$ para cada $x, y \in X$; se llama *métrica inducida* por f. Si $N \subset M$, donde M es un espacio métrico, N con la métrica $d|_{N^2}$ es un espacio métrico, que se llama *subespacio* de M. Definimos las distancias $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ y $d(A, B) = \inf_{x \in A} d(x, B)$. Tenemos $d(x, A) \leqq d(x, y) + d(y, A)$. Un conjunto A se dice *acotado* si hay $M \in \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) \leqq M$ para todos $x, y \in A$; en ese caso tiene sentido definir el *diámetro* $\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y)$; la unión de dos acotados es acotada.

Espacios topológicos métricos. Si $x \in X$ y $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ definimos la *bola* $B_\epsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$; tenemos que si $x \in B_{\epsilon_1}(x_1) \cap B_{\epsilon_2}(x_2)$ entonces $B_\epsilon(x) \subset B_{\epsilon_1}(x_1) \cap B_{\epsilon_2}(x_2)$, donde

$\epsilon = \frac{1}{2}\min\{\epsilon_1 - d(x,x_1), \epsilon_2 - d(x,x_2)\}$, así que le podemos dar una topología a X formada por la base que dan las bolas; el conjunto $\{B_{1/n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de x numerable para cada $x \in X$, luego X cumple 1AN, y además es Hausdorff; si $A \subset X$ entonces $d(x,A)$ es continua; si A, B son cerrados disjuntos entonces $f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$ es continua así que $U = f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ y $V = f^{-1}((\frac{1}{2},1])$ son abiertos disjuntos que cubren A y B y X es normal, luego T_4. Definimos la bola cerrada $B'_\epsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,y) \leqq \epsilon\}$, vemos que es cerrada y $\overline{B_\epsilon(c)} \subset B'_\epsilon(x)$. Un espacio topológico se dice *metrizable* si está inducido por una métrica sobre el conjunto; metrizable implica 1AN y T_4. Los subespacios topológicos son los subespacios métricos. Si $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son métricos, ponemos $\overline{d}_n(x,y) = \min\{d_n(x,y), 1\}$, es métrica y da la misma topología en cada X_n, y $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ tiene la misma topología como producto de (X_n, d_n) y con la distancia $D(x,y) = \sup\limits_n \frac{\overline{d}_n(x_n,y_n)}{n}$. X metrizable es separable sii es 2AN (si hay un denso $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces $\{B_{1/m}(a_n)\}_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ es base) sii es de Lindelöf (una implicación es fácil; si el espacio es de Lindelöf entonces cubrimos X por bolas de radio $1/n$ para cada n, tomamos un subcubrimiento contable y un punto de cada bola del subcubrimiento; todos estos puntos son a lo sumo numerables y forman un conjunto denso).

Teorema de metrización de Urysohn. Todo espacio 2AN y T_4 es metrizable. Si $\{\mathcal{U}_n\}$ es una base numerable, sea $\mathcal{F}$ el conjunto de las $f_{ij} : X \to [0,1]$ continuas que da T_4 sobre $\overline{\mathcal{U}_i}$ y $\mathcal{U}_j^c$ en caso de que $\overline{\mathcal{U}_i} \subset \mathcal{U}_j$. $\mathcal{F}$ es numerable y $\theta : X \to [0,1]^{\mathcal{F}}$ dado por $\theta(x) = (f(x))_{f\in\mathcal{F}}$ cumple que $\theta : X \to \operatorname{im}\theta$ es homeomorfismo. Inyectiva: si $x \neq y$, hay $\mathcal{U}_j$ con $x \in \mathcal{U}_j$, $y \in \mathcal{U}_j^c$; ahora por T_4 sobre $\{x\}$ y $\mathcal{U}_j^c$ hay $\mathcal{U}_i$ con $x \in \mathcal{U}_i \subset \overline{\mathcal{U}_i} \subset \mathcal{U}_j$, entonces f_{ij} separa x, y. Continua: porque las f son continuas. Abierta: si $x \in \mathcal{U}_i$ sea $\mathcal{U}_j$ con $x \in \overline{\mathcal{U}_j} \subset \mathcal{U}_i$ y $A_x = \{\theta(y) \mid |f_{ji}(y) - f_{ji}(x)| < \frac{1}{2}\}$; A_x es entorno de $\theta(x)$ y $A_x \subset \theta(\mathcal{U}_i)$, así que $\theta(\mathcal{U}_i)$ es abierto. Como $\mathcal{F}$ es numerable, $[0,1]^{\mathcal{F}}$ es metrizable; como $\theta(X) \subset [0,1]^{\mathcal{F}}$, X es metrizable.

Completitud. Una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ se dice *de Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ hay $n_0 \in \mathbb{N}$ con $n, m \geqq n_0$ implica $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy es acotada, y si tiene un punto adherente entonces converge a ese punto. Un espacio métrico se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy converge; es equivalente a que toda familia decreciente de cerrados $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no vacíos con $\lim\limits_n \delta(C_n) = 0$ tiene intersección no vacía. Todo cerrado en un completo es completo; todo subespacio completo es cerrado. Si un espacio es compacto es completo, ya que toda sucesión tiene una subsucesión convergente y luego si es de Cauchy converge. Se puede adapatar la demostración de que todo espacio de Hausdorff localmente compacto es de Baire para mostrar que todo espacio métrico completo es de Baire.

Compacidad. X métrico es compacto sii es completo y *precompacto* o *totalmente acotado*, esto es, que para todo $\epsilon > 0$ hay un conjunto finito $x_1, \ldots, x_n$ tal que $X = B_\epsilon(x_1) \cup \cdots \cup B_\epsilon(x_n)$. Si $X = \bigcup_{i\in I} A_i$ pedimos $x_1, \ldots, x_n$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n_1} B_{1/n}(x_i)$; hay $x_i = x_n$ tal que $B_{1/n}(x_n)$ no se puede cubrir con finitos A_i, para cada $n \in \mathbb{N}$; podemos pedir que las bolas $B_{1/n}(x_n)$ se corten; la sucesión de sus centros es de Cauchy así que converge a un punto x; sea $i \in I$ con $x \in A_i$; como A_i es abierto hay $k \in \mathbb{N}$ con $x \in B_{2/k}(x) \subset A_i$; entonces $B_{1/k}(x_k) \subset A_i$, lo cual contradice que $B_{1/k}(x_k)$ no se pueda cubrir con finitos A_i. Si en X toda sucesión tiene una subsucesión convergente entonces es precompacto: ponemos $x_1 \in X$ arbitrario; para $n \geqq 1$ ponemos $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$; si este proceso termina tenemos precompacidad; si no, obtenemos una sucesión con $d(x_i, x_j) \geqq \epsilon$ para todos $i \neq j$, la cual no puede tener una subsucesión convergente: contradicción. Entonces compacto sii toda sucesión tiene subsucesión convergente.

Continuidad uniforme. Una función $f : M \to N$ entre espacios métricos se dice uniformemente continua si hay una función $\delta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que si $x, y \in M$ y $\epsilon > 0$ entonces $d(x,y) < \delta(\epsilon) \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Si $f : M \to N$ es continua y M es compacto entonces es uniformemente continua: sea $\epsilon > 0$; sea $x \in M$; hay $\delta(x) > 0$ con $d(x,y) < \delta(x) \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$; las bolas $B_{\delta(x)}(x)$ cubren M; tomamos un subcubrimiento finito $\bigcup_{i=1}^{n} B_{\delta(x_i)}(x_i)$ y ponemos $\delta(\epsilon) = \frac{1}{2} \min_{i=1}^{n} \delta(x_i)$. Las funciones uniformemmente continuas mandan sucesiones de Cuachy en sucesiones de Cauchy.

Punto fijo. Sea X completo. Si $f : X \to X$ es continua y hay $k \in (0,1)$ con $d(f(x), f(y)) \leqq kd(x,y)$ para todos $x, y \in X$ entonces hay un único $a \in X$ tal que $f(a) = a$. Ponemos $x_0 \in X$ arbitrario y $x_{i+1} = f(x_i)$; vemos que $d(x_n, x_m) \leqq \frac{1-k^{m-n}}{1-k} d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{1-k} d(x_n, x_{n+1}) \leqq \frac{k^{n-1}}{1-k} d(x_1, x_2)$ si $n \leqq m$ así que es de Cauchy; luego converge a x y claramente $f(x) = x$. Unicidad es $d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leqq kd(a,b)$ así que $d(a,b) = 0$ y $a = b$ si a, b son dos puntos fijos.

Espacios de funciones. Si X, Y son espacios métricos definimos $B(X,Y)$ como el conjunto de funciones $f : X \to Y$ acotadas, es decir, tales que $\operatorname{Im} f$ es acotada, y $CB(X,Y) \subset B(X,Y)$ como el subconjunto de las que además son continuas; son espacios métricos con la distancia $d(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$. Se ve que convergencia de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a f en $B(X,Y)$ es equivalente a que para todo $\epsilon > 0$ hay $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(x), f_n(x)) < \epsilon$ para todo $n \geqq n_0$ y $x \in X$; esto último se llama *convergencia uniforme*. Veamos que $CB(X,Y)$ es cerrado en $B(X,Y)$, es decir, que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen uniformemente a f entonces es f continua; sea $x_0 \in X$ y veamos que para $\epsilon > 0$ hay $\delta > 0$ tal que si $d(x, x_0) < \delta$ entonces $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$; ahora $d(f(x), f(x_0)) \leqq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0))$; pidiendo n grande controlamos el primer y el tercer término; achicando δ controlamos el del medio. El mismo argumento da que el espacio $UB(X,Y) \subset CB(X,Y)$ de las uniformemente continuas acotadas es cerrado.

Completitud de $B(X,Y)$. Si Y es completo entonces $B(X,Y)$ también; en particular $CB(X,Y)$ también. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy entonces $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también de Cauchy para cada $x \in X$ así que podemos definir f por $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Veamos que la convergencia es uniforme: queremos ver que si $\epsilon > 0$ hay n_0 tal que $n \geqq n_0$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$; ahora $d(f_n(x), f(x)) \leqq d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f(x))$; el primer término se controla porque $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy; el segundo porque $f(x) = \lim_n f_n(x)$ así que basta tomar m grande dado x. Falta ver que $f \in B(X,Y)$ o sea que es acotada, pero $d(f(x), f(y)) \leqq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y))$.

Completación. Sea X un espacio métrico y $a \in X$. A cada $u \in X$ le asociamos la función $f_u : X \to \mathbb{R}$ dada por $f_u(x) = d(u,x) - d(a,x)$; entonces $u \mapsto f_u$ es una inmersión métrica de X en $CB(X,\mathbb{R})$. Entonces X es isométrico a un subespacio de $CB(X,\mathbb{R})$; como $CB(X,\mathbb{R})$ es completo, la clausura es completa. Probamos que todo espacio es un subespacio denso de un espacio completo, que se llama *completación* del primero. Se ve que la completación es única salvo isometría.

Equicontinuidad. Una familia F de funciones de $X \to Y$ se dice *equicontinua* si para todo $x \in X$ y para todo $\epsilon > 0$ hay $\delta > 0$ tal que si $y \in X$ cumple $d(x,y) < \delta$ entonces $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ para todo $f \in F$; se dice *uniformemente equicontinua* si para todo $\epsilon > 0$ hay $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ cumplen que $d(x,y) < \delta$ entonces $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ para toda $f \in F$. Si $A \subset B(X,Y)$ es equicontinuo entonces $\overline{A}$ también es. Si F es equicontinua con X compacto entonces F es uniformemente equicontinua. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas que convergen uniformemente entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua; en particular si X es compacto va a ser uniformemente equicontinua. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones equicontinua con X compacto que converge puntualmente entonces converge uniformemente.

Ascoli-Arzelà. Sea X compacto, Y completo y $H \subset CB(X,Y)$; el teorema dice que H es relativamente compacto sii H es equicontinuo y $H(x) = \{f(x) \mid f \in H\}$ es relativamente compacto para cada $x \in X$. Necesidad: si H es relativamente compacto se ve que $H(x)$ es precompacto así que por completitud de Y resulta relativamente compacto; se ve equicontinuidad. Suficiencia: como $CB(X,Y)$ es completo sólo hay que probar que H es precompacto; dado $\epsilon > 0$ sea $V(x)$ un entorno tal que $y \in V(x) \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{4}$; cubrimos X con finitos $V(x_i)$ con $i \in [1, m]$;

cada $H(x_i)$ es relativamente compacto así que su unión (finita) K también; sean $c_1, \ldots, c_n \in K$ tales que si $u \in K$ entonces $u \in B_{\frac{\epsilon}{4}}(c_i)$ para algún i; sea Φ el conjunto (finito) de las funciones $[1,m] \cap \mathbb{N} \to [1,n] \cap \mathbb{N}$; para cada $\phi \in \Phi$ sea L_ϕ el conjunto de todas las funciones $f \in H$ tales que $d(f(x_i), c_{\phi(i)}) < \frac{\epsilon}{4}$ para todo $i \in [1,m]$; de la definición de los c_i sigue que H está cubierto por la unión de los L_ϕ; para terminar basta con mostrar que el diámetro de cada L_ϕ es menor a ϵ; ahora si $f, g \in L_\phi$, $d(f(y), g(y)) \leqq d(f(y), f(x_i)) + d(f(x_i), c_{\phi(i)}) + d(c_{\phi(i)}, g(x_i)) + d(g(x_i), g(y)) < \epsilon$ pidiendo i de manera que $y \in V(x_i)$.

Números complejos Definimos en $\mathbb{R}^2$ dos operaciones: la suma $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ y el producto $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, bc + ad)$; escribimos $a + bi$ a (a,b) y tenemos $i^2 = 1$; las operaciones dan estructura de cuerpo a $\mathbb{R}^2$ que llamamos $\mathbb{C}$, el cuerpo de los *números complejos*; definimos la función *conjugación* $z \in \mathbb{C} \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ como $\overline{a + bi} = a - bi$; se ve que $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$ y $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$; definmos la *norma* $z \in \mathbb{C} \mapsto |z| \in \mathbb{R}_{\geqq 0}$ dada por $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$; define una distancia $d(a,b) = |a-b|$; se ve que las operaciones son continuas; el espacio es completo; un subconjunto es compacto sii es cerrado y acotado; las bolas son convexas.

Series de potencias. Una *serie de potencias* es una serie funcional $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$; si $R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}$ entendiendo que $1/0 = +\infty$ y $1/\infty = 0$ entonces la serie converge absoluta y uniformemente en $B_R(a)$ y diverge en todo punto de $\mathbb{C} - \overline{B}_R(a)$, donde $B_{+\infty}(a) = \mathbb{C}$; en particular la serie converge absoluta y puntualmente a una función continua en $B_R(a)$. En efecto, sea $K \subset B_R(a)$ compacto; sea $r = \max_{x \in K} |x - a|$ (existe por compacidad); entonces $K \subset \overline{B}_r(a) \subset B_R(a)$ así que $r < R$ y $r \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$; sea $\rho \in \mathbb{R}$ con $r \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < \rho < 1$; como $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \geqq k} \sqrt[n]{|a_n|}$, hay $k \in \mathbb{N}$ con $\sup_{n \geqq k} \sqrt[n]{|a_n|} < \rho/r$ así que $\sqrt[n]{|a_n|} < \rho/r$ y $|a_n|r^n < \rho^n$ para $n \geqq k$; si $y \in K$ tenemos $|y - a| \leqq r$ así que $|a_n(y-a)^n| \leqq |a_n|r^n < \rho^n$ y $\sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-a)^n$ está mayorada por $\sum_{n=k}^{\infty} \rho^n = \frac{\rho^k}{1-\rho}$; luego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ converge absoluta y uniformemente a una función continua en todo compacto contenido en $B_R(a)$ y por lo tanto puntualmente a una continua en todo $B_R(a)$. Se ve que en $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(a)$ diverge. Se ve que $\liminf_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqq \liminf_n \sqrt[n]{|a_n|} \leqq \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \leqq \limsup_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ así que si $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ entonces es igual a $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ y R, el *radio de convergencia* de la serie, es igual a $1/L$.

Función exponencial. Llamamos *función exponencial* a la serie de potencias $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, con radio de convergencia infinito. Tenemos $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ usando la fórmula $u(\sum_n a_n, \sum_n b_n) = \sum_{m,n} u(a_m, b_n)$ para u bilineal continua; en particular tenemos $e^{-x} = 1/e^x$; vemos que $e^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^+$. Definimos la *función logarítimica* $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como la inversa de $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Definimos las *funciones trigonométricas seno* y *coseno* como $\operatorname{sen} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ y $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Tenemos $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$, $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$, $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$, $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. Se ve que $\operatorname{sen}(\mathbb{R}), \cos(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$ viendo las series y que $\operatorname{sen}' x = \cos x, \cos' x = -\operatorname{sen} x$. Derivando coseno real un par de veces se ve que $\cos x \leqq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ y que $\cos\sqrt{3} \leqq -1/8$; como $\cos 0 = 1$ hay $x \in (0, \sqrt{3})$ con $\cos x = 0$; sea F el mínimo del conjunto $\{x \in \mathbb{R}^+ \mid \cos x = 0\}$ y definimos $\pi = 2F$; vemos que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$ y se ve que $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \cos(x + 2\pi) = \cos x$. Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ entonces hay un único número real $\theta \in [0, 2\pi)$ con $z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. En particular vemos que si $z \in \mathbb{C}$ y $n > 0$ entonces hay $z_0 \in \mathbb{C}$ con $z_0^n = z$.

Teorema fundamental del álgebra. Todo polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ de grado positivo tiene una raíz. Vemos que hay $R > 0$ con $|z| > R$ implica $|f(z)| > |f(0)|$, así que $|f|$ tiene mínimo global en $B_R(0)$, que se alcanza en $x \in \mathbb{C}$; supongamos que $|f(x)| > 0$. Ponemos $f(t) = c_0 + c_1(t-x) + \cdots + c_n(t-x)^n = c_0 + c_m(t-x)^m + (t-x)^{m+1}g(t-x)$, con $c_0, c_m \neq 0$ (lo segundo por ser f de grado positivo). Ponemos $t = x + \lambda z_1$, con $z_1^m = -c_0/c_m$. Entonces

$f(t) = c_0(1 - \lambda^m + \lambda^{m+1} z_1^{m+1} c_0^{-1} g(\lambda z_1))$. Sea $C > 0$ con $|z_1^{m+1} c_0^{-1} g(\lambda z_1)| \leqq C$, con $\lambda \in [0,1]$. Entonces $|f(t)| \leqq |c_0|(1 - \lambda^m + C\lambda^{m+1})$ y con $\lambda < 1/C$ obtenemos $0 < 1 - \lambda^m + C\lambda^{m+1} < 1$ y $|f(t)| < |c_0| = |f(x)|$, absurdo.

Espacios normados Sea E un k espacio vectorial, donde k es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$; una *norma* en E es una función $x \mapsto \|x\|$ tal que $\|x\| \geqq 0$ con igualdad sii $x = 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ y $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in E$; E con una norma definen un *espacio normado*. Los espacios normados son métricos con la distancia $d(x, y) = \|x - y\|$. Las operaciones de espacio vectorial son continuas. Si E, F son espacios normados, $f : E \to F$ es lineal entonces es continua sii es uniformemente continua, sii es continua en cero y sii hay $M > 0$ con $\|f(x)\| \leqq M\|x\|$; los primeros tres sii son obvios; si f es continua en cero, hay $\delta > 0$ tal que $\|y\| < \delta$ implica $\|f(y)\| < 1$, así que con $y = \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|}$ tenemos $\|f(x)\| < \frac{2}{\delta}\|x\|$; el recíproco es obvio. En general si $E_1, \dots, E_n, F$ son espacios normados y $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ es multilineal entonces es continuo sii hay $M > 0$ con $\|f(x_1, \dots, x_n)\| \leqq M\|x_1\| \dots \|x_n\|$. Dos normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ se dicen *equivalentes* si inducen la misma topología; la identidad $id : E \to E$ es lineal; si las normas son equivalentes va a ser continua, o sea que va a haber $M_1 > 0$ con $\|x\|_1 \leqq M_1\|x\|_2$; similarmente $M_2 > 0$ con $M_2\|x\|_2 \leqq \|x\|_1 \leqq M_1\|x\|_2$; el recíproco es claro.

Hiperplanos. Un hiperplano H es un subespacio propio maximal, o sea el núcleo de un morfismo no nulo $f : E \to k$. Claramente $\overline{H}$ es subespacio; entonces H es cerrado o denso; veamos que es cerrado si y sólo si f es continua: si f es continua $f(\overline{H}) \subset \overline{f(H)} = 0$ así que es cerrado; si f no es continua sea $v \in E - H$; si $d(v, H) > 0$, hay $M > 0$ con $\|h + v\| \geqq M$ y $\|f(v + h)\| = \|f(v)\| \leqq \frac{\|f(v)\|}{M}\|h + v\|$, $\|f(av + h)\| = |a|\|f(v)\| \leqq \frac{\|f(v)\|}{M}\|h + av\|$, así que como $E = H \oplus \langle v \rangle$, f es continua, absurdo; entonces $d(v, H) = 0$ y H es denso.

Dimensión finita. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de E entonces $(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ es un homeomorfismo. Por inducción en n: para $n = 1$ es trivial; si se cumple para $n - 1$ sea H el hiperplano $\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$; la hipótesis inductiva dice que la norma inducida en H es equivalente a la norma $\max\limits_{1 \leqq i \leqq n-1} |a_i|$; entonces H es completo y por lo tanto cerrado en E; luego $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \mapsto a_n$ es continua y $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \mapsto (a_1, \dots, a_n)$ es continua; ahora la continuidad de $a_i \mapsto a_i v_i$ y $+ : \langle v_1 \rangle \times \cdots \times \langle v_n \rangle \to E$ arman la inversa continua. En particular resulta que todas las normas son equivalentes y que E es completo. Se ve que si E es cualquier espacio normado, V es un subespacio cerrado y W es un subespacio de dimensión finita entonces $V + W$ es cerrado; en particular los subespacios de dimensión finita son cerrados. Obtenemos el teorema de F. Riesz: todo espacio normado localmente compacto es de dimensión finita: dilatando la norma sin alterar la topología logramos que $B = \{x \mid \|x\| \leqq 1\}$ sea compacto; lo cubrimos con bolas $B_{1/2}(a_1), \dots, B_{1/2}(a_n)$; sea $V = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$; si $V = E$ estamos; si no, hay $x \in E$ con $x \notin V$ así que como V es cerrado por lo anterior, $d(x, V) = \alpha > 0$ y hay $y \in V$ con $\alpha \leqq \|x - y\| \leqq \frac{3}{2}\alpha$; si $z = \frac{x-y}{\|x-y\|}$ entonces hay i con $\|z - a_i\| < \frac{1}{2}$, pero $x = y + \|x - y\| z = y + \|x - y\| a_i + \|x - y\|(z - a_i)$ y $y + \|x - y\| a_i \in V$ así que como $d(x, V) = \alpha$ tenemos $\|x - y\| \cdot \|z - a_i\| \geqq \alpha$ y $\|x - y\| \geqq 2\alpha$, absurdo porque $\alpha > 0$.

Espacios $\mathcal{L}(E, F)$. Si E, F son dos espacios normados entonces definimos $\mathcal{L}(E, F)$ como el espacio vectorial formado por las morfismos continuos de E a F con la norma $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leqq 1} \|f(x)\|$. Si F es completo entonces $\mathcal{L}(E, F)$ también. Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy entonces $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ se ve que también así que ponemos f dada por $f(x) = \lim\limits_n f_n(x)$; se ve fácil que es lineal; ahora $\|f(x) - f_n(x)\| \leqq \|f(x) - f_m(x)\| + \|f_m(x) - f_n(x)\|$, así que para $\|x\| \leqq 1$ y n grande tenemos $\|f(x) - f_n(x)\| < \epsilon$; luego $\|f(x)\| \leqq \|f_n(x)\| + \epsilon$ y f es continua; además $\|f(x) - f_n(x)\| < \epsilon$ para $\|x\| \leqq 1$ implica $\|f - f_n\| < \epsilon$ así que $f = \lim\limits_n f_n$, como queríamos. Si $f \in \mathcal{L}(E, F), g \in \mathcal{L}(F, G)$ entonces $\|g \circ f\| \leqq \|g\| \cdot \|f\|$ ya que $\|g(f(x))\| \leqq \|g\| \cdot \|f(x)\| \leqq \|g\| \cdot \|f\|$ si $\|x\| \leqq 1$.

Espacios $\ell^p(E)$. Si E es un espacio de Banach definimos el espacio $\ell^p(E)$ para $1 \leqq p \leqq \infty$

como el conjunto de las secuencias $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con la norma $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{1/p}$ (en $p = \infty$ es el supremo de las normas) siempre que converja (que las normas estén acotadas): si $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^p$ es de Cauchy, usando que E es de Banach vemos que converge puntualmente a $x \in E^{\mathbb{N}}$; dados $k \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$ hay n_ϵ tal que si $n \geqq n_\epsilon$ entonces $\sum_{i=1}^{k} \|x_i^n - x_i\|^p < \epsilon$; en efecto, $\sum_{i=1}^{k} \|x_i^n - x_i\|^p \leqq 2^{p-1} \sum_{i=1}^{k} \|x_i^n - x_i^m\|^p + 2^{p-1} \sum_{i=1}^{k} \|x_i^m - x_i\|^p$ así que con pedir n, m grandes con respecto a ϵ como $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy controlamos el primer término y con pedir m grande en cada $i = 1, \ldots, k$ logramos controlar el segundo término; llevando k al límite obtenemos que $\|x - x^n\|_p < \epsilon$ si n es grande así que $x = \lim\limits_n x^n$; usando que $\|x - x^n\|_p$ y $\|x^n\|_p$ convergen queda lo que faltaba que es que $x \in \ell^p$.

Espacios de Banach. Un espacio normado completo se dice *de Banach*. Todo espacio normado de dimensión finita es de Banach. Si X es un espacio métrico y E es de Banach entonces vimos que $B(X, E)$, $CB(X, E)$ y $UB(X, E)$ son de Banach. Si E es normado y F es de Banach entonces vimos que $\mathcal{L}(E, F)$ es de Banach. Si E es de Banach vimos que $\ell^p(E)$ también es de Banach; además, $c(E) \subset \ell^\infty(E)$, el espacio de las sucesiones convergentes y $c_0(E) \subset c(E)$, el espacio de las convergentes a cero, también.

Series. Si E es un espacio normado y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ definimos la *serie* como la secuencia $\{\sum_{i=1}^{n} x_i\}_{n\in\mathbb{N}}$; si converge notamos $\sum_{i=0}^{\infty} x_i = \lim\limits_n \sum_{i=0}^{n} x_i$; las sucesiones con serie convergente forman un espacio vectorial. Si E es de Banach tenemos el criterio de Cauchy: la serie converge sii $\|x_n + \cdots + x_m\| < \epsilon$ si $n, m \geqq n_\epsilon$. Una serie $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice *absolutamente convergente* si la serie de $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente; si E es de Banach absolutamente convergente implica convergente; en ese caso si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es biyectiva entonces $\{x_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ también tiene serie convergente y converge al mismo límite; entonces podemos definir conjuntos $A \subset E$ numerables como *absolutamente sumable* si hay una biyección con $\mathbb{N}$ que lo vuelve una sucesión absolutamente convergente; vemos que esto es equivalente a que $\sum_{n\in J} \|x_n\|$ sea acotado donde $J \subset \mathbb{N}$ recorre los conjuntos finitos; en ese caso hay una propiedad asociativa: si $A = \bigcup_n B_n$ con B_n disjuntos y $z_n = \sum_{i\in B_n} x_i$ entonces $\sum_n z_n$ converge y es igual a $\sum_{i\in A} x_i$. Si E, F, G son espacios de Banach, $u : E \times F \to G$ es bilineal y continua y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son absolutamente convergentes entonces la familia $\{u(x_n, y_m)\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ es absolutamente sumable y $\sum_{m,n\in\mathbb{N}} u(x_n, y_m) = u\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n, \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n\right)$: vemos que converge viendo que las subsumas finitas de normas están acotadas y por asociatividad y bilinealidad tenemos $\sum_{m,n} u(x_n, y_m) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{m=0}^{\infty} u(x_n, y_m)) = \sum_{n=0}^{\infty} u(x_n, \sum_n y_n) = u(\sum_n x_n, \sum_n y_n)$.

Medida Sea X un conjunto. Un *álgebra* sobre X es una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\varnothing \in \mathcal{B}$ y es cerrada por uniones finitas y complementos; se dice *σ-álgebra* si además es cerrada por uniones numerables. Intersección de σ-álgebras es σ-álgebra, así que dado $B \subset 2^X$ podemos hablar de la σ-álgebra generada $\langle B\rangle$, la intersección de todas las σ-álgebra que lo contienen. Si ω_1 es el primer ordinal no numerable, por recursión transfinita ponemos $F_\varnothing = B \cup \{\varnothing\}$, $F_{\alpha\cup\{\alpha\}} = \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \mid \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F_\alpha\} \cup \{A^c \mid A \in F_\alpha\}$ y $F_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$ si $\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$; entonces $\langle B\rangle = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} F_\alpha$; se sigue que si $|B| = \kappa$ cardinal infinito entonces $|\langle B\rangle| \leqq \kappa^{\aleph_0}$. Si X es un espacio topológico llamamos *σ-álgebra de Borel* a la σ-álgebra generada por los abiertos. Una *clase monótona* sobre X es un conjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que si $E_n \in \mathcal{B}$ es creciente $E_n \subset E_{n+1}$ entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{B}$ y si es decreciente $E_n \supset E_{n+1}$ entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{B}$; vale que si $\mathcal{B}_0$ es álgebra y $\mathcal{B} \supset \mathcal{B}_0$ es una clase monótona entonces $\langle \mathcal{B}_0\rangle \subset \mathcal{B}$ (tomamos la menor $\mathcal{B}$; $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$ porque $\{A^c \mid A \in \mathcal{B}\}$ es monótona; $\mathcal{C}_E = \{F \in \mathcal{B} \mid E \cup F \in \mathcal{B}\}$ es monótona y $E \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{C}_E$ así que $\mathcal{C}_E = \mathcal{B}$; $\mathcal{D} = \{E \in \mathcal{B} \mid \mathcal{C}_E = \mathcal{B}\}$ es monótona y $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{D}$ así que $\mathcal{D} = \mathcal{B}$ y resulta que $\mathcal{B}$ es álgebra y por lo tanto σ-álgebra).

Un *espacio medida* es una terna $(X, \mathcal{B}, \mu)$ con X conjunto, $\mathcal{B}$ una σ-álgebra y $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$, una *medida*, que cumple $\mu(\varnothing) = 0$ y si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ son disjuntos dos a dos entonces $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$; los elementos de $\mathcal{B}$ se llaman *medibles*; X se dice σ-

finito si es unión numerable de medibles de medida finita. Se cumple: $E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leqq \mu(F)$; si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ entonces $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leqq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$; inclusión-exclusión $\mu(\bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,n\}\\ |J|=k}} \mu(\bigcap_{i\in J} E_i)$; si $E_n \subset E_{n+1}$, $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$; si $E_n \supset E_{n+1}$ y alguno tiene medida finita entonces $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$. Decimos que $E \in \mathcal{B}$ es *nulo* si tiene medida cero; el espacio se dice *completo* si todo subconjunto de un nulo es medible; dado X tenemos que el conjunto $\overline{\mathcal{B}}$ de los $E \triangle N$, donde E recorre los medibles y N los subconjuntos de nulos, es σ-álgebra; poniendo $\overline{\mu}(E \triangle N) = \mu(E)$ tenemos que $\overline{\mu}$ está bien definida en $\overline{\mathcal{B}}$ y $(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu})$ es completo, la *completación* de X, es la menor σ-álgebra $\overline{\mathcal{B}} \supset \mathcal{B}$ completa y la medida está determinada.

Medidas exteriores y pre-medidas. Si X es un conjunto, una *medida exterior* es una función $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ tal que $\mu^*(\varnothing) = 0$, $\mu^*(E) \leqq \mu^*(E \cup F)$ y $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leqq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n)$; en ese caso decimos que $E \subset X$ es *medible Carathéodory* sii para todo $A \subset X$ se cumple $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$; los medibles forman una σ-álgebra completa donde la medida exterior es una medida: vemos $\varnothing$ medible, complementos medibles, unión de dos medibles, luego los medibles son un álgebra, luego probamos que unión numerable de medibles disjuntos es medible, luego toda unión, y al final la σ-aditividad y completitud. $\mathcal{B}_0 \subset X$ se dice *semi-anillo* si $\varnothing \in \mathcal{B}_0$, $E, F \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow E \cap F \in \mathcal{B}_0$ y $E \setminus F = \coprod_{i=1}^n E_i$, con $E_i \in \mathcal{B}_0$; si $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, hay $F_n \in \mathcal{B}_0$ con $E = \coprod_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Una *pre-medida* sobre un semi-anillo $\mathcal{B}_0$ es una función $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \to [0, +\infty]$ con $\mu_0(\varnothing) = 0$ y $\mu_0(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(E_n)$ si $E_n \in \mathcal{B}_0$ son disjuntos y su unión está también en $\mathcal{B}_0$. Si tomamos $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ dada por $\mu^*(E) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(E_n) \mid E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n, E_n \in \mathcal{B}_0\}$ es una medida exterior tal que su medida de Carathéodory $(\mathcal{B}, \mu)$, que se llama *extensión de Hahn-Kolmogorov*, extiende a $(\mathcal{B}_0, \mu_0)$ o sea $\mu|_{\mathcal{B}_0} = \mu_0$ y $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$. Se ve que si $A \subset X$ hay $E \in \langle \mathcal{B}_0 \rangle$ con $A \subset E$ y $\mu^*(A) = \mu(E)$; si X es σ-finito entonces $A \in \mathcal{B}$ sii para todo $\epsilon > 0$ hay $E \in \mathcal{B}_{0\sigma}$ (o sea unión numerable de elementos de $\mathcal{B}_0$) con $A \subset E$ y $\mu^*(E \setminus A) < \epsilon$; $E \in \mathcal{B}$ y $\mu(E) < \infty$ sii hay $F \in \mathcal{B}_0$ con $\mu(F) < \infty$ tal que $\mu(E \triangle F) < \epsilon$. Si X es σ-finito y $(\mathcal{B}', \mu')$ es otra medida que extiende $(\mathcal{B}_0, \mu_0)$ entonces μ y μ' coinciden en $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$; así que si X es σ-finito y μ_0 es pre-medida, hay una única manera de extenderla a una medida en $\langle \mathcal{B}_0 \rangle$.

Medida de Lebesgue. En $\mathbb{R}^d$ el conjunto $\mathcal{Q}^d$ de los *intervalos* $\prod_{i=1}^d [a_i, b_i)$ es un semi-anillo; $\mu_0(\prod_{i=1}^d [a_i, b_i)) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$ es una pre-medida. Sea μ su extensión de Hahn-Kolmogorov, la *medida de Lebesgue*; como los abiertos son uniones numerables de intervalos (por ejemplo los binarios), la σ-álgebra de Lebesgue incluye a la de Borel y de hecho es su completación. Vale que E es medible sii para todo $\epsilon > 0$ hay abierto G con $E \subset G$ y $\mu^*(G \setminus E) < \epsilon$ sii hay cerrado F con $F \subset E$ y $\mu^*(E \setminus F) < \epsilon$; y E es medible y $\mu(E) < \infty$ sii para todo $\epsilon > 0$ hay una unión de finitos intervalos F con $\mu^*(E \triangle F) < \epsilon$.

Funciones medibles. Si $(X, \mathcal{B}), (X', \mathcal{B}')$ son σ-álgebras decimos que $f : X \to X'$ es *morfismo* de σ-álgebras si para todo $A \in \mathcal{B}'$ se tiene $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$; forman una categoría. Decimos que $f : X \to Y$, X espacio medida, Y espacio topológico, es *medible*, sii es morfismo de σ-álgebras, donde Y tiene la σ-álgebra de Borel, o, equivalentemente, que $f^{-1}(G)$ es medible para todo abierto $G \subset Y$. Si $f : X \to E$, E subespacio de $\overline{\mathbb{R}}$, esto es que los conjuntos $\{f > a\} = f^{-1}((a, \infty])$ sean medibles, o $\{f \geqq a\}$; si $f : X \to \mathbb{C}$ es que $\mathrm{Re}(f)$ y $\mathrm{Im}(f)$ sean; las continuas son medibles y además si g es continua y f medible $g \circ f$ es medible; entonces si f, g medibles cf y $|f|^p$ también, $f + g$ también porque $\{f + g > a\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{f > a - q\} \cap \{g > q\}$, fg también porque es $\frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)$; si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son, también $\sup f_n$ y $\inf f_n$ porque $\{\sup f_n > a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n > a\}$, luego también $\overline{\lim} f_n$ y $\underline{\lim} f_n$ y $\lim f_n$ (puntual) si existe. Si $E \subset X$ es medible ponemos $\mathbb{1}_E : X \to [0, +\infty]$ dada por $\mathbb{1}_E(x) = \{\begin{smallmatrix} 1, \text{ si } x\in E \\ 0, \text{ si } x\notin E \end{smallmatrix}$. Una función se dice *simple* si es medible y con imagen finita o, equivalentemente, $\sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{E_i}$ con $c_i \in \mathbb{R}$ y E_i medibles (para volverlos disjuntos partimos $\bigcup_{i=1}^n E_i$ en las 2^n partes disjuntas de la forma $E_{i_1} \cup \cdots \cup E_{i_r} \setminus (E_{i_{r+1}} \cup \cdots \cup E_{i_n})$, con $i_1, \dots, i_n$ permutación de $[n]$); forman un espacio vectorial.

Tenemos que $f : X \to [0,+\infty]$ es medible sii es límite puntual de funciones simples finitas s_n monótonas $s_n \leqq s_{n+1}$: para n ponemos $s_n(x) = \max\{\frac{k}{2^n} \mid k \in \{0,1,\ldots,2^n n\}, \frac{k}{2^n} \leqq f(x)\}$; si X es σ-finito podemos pedir las s_n de soporte de medida finita tomando $s'_n = \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n E_i} s_n$.

Convergencia. Decimos que $f_n \to f$ *en casi todo punto* si $\lim f_n = f$ salvo en un conjunto nulo; equivalentemente sii para todo $n \geqq 1$ vale $\mu(\bigcap_{m_0\geqq 1}\bigcup_{m\geqq m_0}\{|f_m - f| \geqq \frac{1}{n}\}) = 0$; una condición suficiente es para todo $n \geqq 1$ la serie $\sum_{m\geqq 1}\mu(|f_m - f| \geqq \frac{1}{n})$ converge; otra es que para todo $n \geqq 1$ se cumpla $\mu(|f_n - f| \geqq \frac{1}{n}) < \frac{1}{2^n}$. Decimos que $f_n \to f$ *uniformemente* en E si para todo $\epsilon > 0$ hay n_0 con $n \geqq n_0 \Rightarrow (\forall x \in E)|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$; *casi uniformemente* si para todo $\epsilon > 0$ hay $F \subset E$ con $\mu(E \setminus F) < \epsilon$ y $f_n \to f$ uniformemente en F; casi uniformemente sii para todo $n \geqq 1$ y para todo $\epsilon > 0$ hay m_0 con $\mu(\bigcup_{m\geqq m_0}\{|f - f_m| \geqq \frac{1}{n}\}) < \epsilon$. Vale casi uniformemente implica en casi todo punto y (Egorov) si $\mu(X) < \infty$ vale la recíproca. Decimos que $f_n \to f$ *en medida* si para todos $\epsilon, \delta > 0$ hay n_0 con $n \geqq n_0 \Rightarrow \mu(|f - f_n| \geqq \delta) < \epsilon$. Convergencia en medida sii para toda subsecuencia hay una subsubsecuencia que converge casi uniformemente. Decimos que f_n es de Cauchy en casi todo punto sii $\mu(\bigcap_{m_0\geqq 1}\bigcup_{i,j\geqq m_0}\{|f_i - f_j| \geqq \frac{1}{n}\}) = 0$ para todo $n \geqq 1$; f_n es de Cauchy casi uniformemente sii para todo $\epsilon > 0$ y todo $n \geqq 1$ hay m_0 con $\mu(\bigcup_{i,j\geqq m_0}\{|f_i - f_j| \geqq \frac{1}{n}\}) < \epsilon$; implica en casi todo punto; condición suficiente: $\mu(|f_n - f_{n+1}| \geqq \frac{1}{2^{n+1}}) < \frac{1}{2^{n+1}}$; f_n es Cauchy en medida sii para todos $\epsilon, \delta > 0$ hay n_0 con $n, m \geqq m_0 \Rightarrow \mu(|f_m - f_n| \geqq \delta) < \epsilon$; Cauchy en medida entonces hay una subsecuencia de Cauchy casi uniformemente, luego Cauchy c.t.p así que hay f con $f_{n_k} \to f$ c.t.p y además casi uniformemente (porque $|f(x) - f_n(x)| \leqq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)|$; el primero se achica por convergencia c.t.p y el segundo por Cauchy uniformemente dentro de F con $\mu(E \setminus F) < \epsilon$).

Integral. Si $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es espacio de medida, $f : X \to [0,+\infty]$ es medible y $E \subset X$ medible definimos la *integral* de f sobre E como el número $\int_E f\,d\mu = \sup\{\sum_{i=1}^n c_i\mu(E_i) \mid E_i \in \mathcal{B}, E = \bigcup_{i=1}^n E_i, c_i \in [0,+\infty), \sum_{i=1}^n c_i\mathbb{1}_{E_i} \leqq f\}$; cuando no hay ambigüedad se escribe $\int_E f$. Es obvio que $\int_E c = c\mu(E)$ (con $0 \cdot +\infty = 0$), que si $A \cap B = \varnothing$ entonces $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$ y que si $f \leqq g$ entonces $\int f \leqq \int g$, luego $\int_E \mathbb{1}_A = \int_{E\cap A}\mathbb{1}_A + \int_{E\setminus A}\mathbb{1}_A = \int_{E\cap A} 1 + \int_{E\setminus A} 0 = \mu(E \cap A)$, $\int_E \sum_{i=1}^n c_i\mathbb{1}_{E_i} = \sum_{i=1}^n c_i\mu(E_i)$, $\int f = \sup\{\int g \mid g \leqq f, g \text{ simple}\}$, $\int_E f = \int \mathbb{1}_E f$ y no cambia la integral si se modifica f en un conjunto nulo. Convergencia monótona: si $f_n : X \to [0,+\infty]$ son medibles con $f_n \leqq f_{n+1}$ salvo en un conjunto nulo entonces $\sup\int f_n = \int \sup f_n$; ponemos $f = \sup f_n$; $\sup\int f_n \leqq \int f$ es obvia; sea $g \leqq f$ simple y finita, $g = \sum_{i=1}^n c_i\mathbb{1}_{E_i}$, y $\epsilon > 0$; sea $E_n^i = \{f_n \geqq (1-\epsilon)c_i\} \cap E_i$; tenemos $\int_{E_i} f_n \geqq \int_{E_n^i} f_n \geqq (1-\epsilon)c_i\mu(E_n^i)$; como $E_n^i \subset E_{n+1}^i$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^i = E_i$ tomando límite $n \to \infty$ queda $\sup\int_{E_i} f_n \geqq (1-\epsilon)c_i\mu(E_i)$; sumando queda $\sup\int f_n \geqq (1-\epsilon)\int g$; tomando supremo en g y luego límite $\epsilon \to 0$ queda $\sup\int f_n \geqq \int f$, como queríamos. Se obtiene linealidad $\int(f+g) = \int f + \int g$ y $\int cf = c\int f$ poniendo f, g como límite de simples y además $\int\sum_{n=1}^\infty f_n = \sum_{n=1}^\infty\int f_n$. Fatou: $\int \underline{\lim} f_n \leqq \underline{\lim}\int f_n$, porque si $k \geqq n$ tenemos $\int \inf_{k\geqq n} f_k \leqq \int f_k$, luego tomando ínfimo en k queda $\int \inf_{k\geqq n} f_k \leqq \inf_{k\geqq n}\int f_k$, luego tomando supremo en n queda $\sup_n \int \inf_{k\geqq n} f_k \leqq \sup_n \inf_{k\geqq n}\int f_k = \underline{\lim}_n \int f_n$, pero por convergencia monótona el lado izquierdo es $\int \sup_n \inf_{k\geqq n} f_k = \int \underline{\lim} f_n$, listo. Markov: si $\lambda > 0$ entonces $\mu(f \geqq \lambda) \leqq \frac{1}{\lambda}\int f$, porque $\int f \geqq \int_{f\geqq\lambda} f \geqq \int_{f\geqq\lambda}\lambda = \lambda\mu(f \geqq \lambda)$. Se sigue que $\int f = 0$ sii $f = 0$ salvo en un conjunto nulo y $\int f < \infty$ implica $f < \infty$ salvo en un conjunto nulo.

Funciones integrables. Decimos que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medible es *integrable* si tanto $f^+ = \max\{f, 0\}$ como $f^- = \min\{f, 0\}$ tienen integral finita, en cuyo caso se llama $\int f$ a $\int f^+ - \int f^-$; como $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$ tenemos linealidad y $|\int f| \leqq \int |f|$. Igualmente $f : X \to \overline{\mathbb{C}}$ medible es *integrable* si tanto $\mathrm{Re}(f)$ como $\mathrm{Im}(f)$ son integrables, en cuyo caso $\int f = \int \mathrm{Re}(f) + i\int \mathrm{Im}(f)$; sale linealidad; queremos ver $|\int f| \leqq \int |f|$: si $\int f = 0$ es obvio; si no con $c = \frac{|\int f|}{\int f}$ tenemos $|\int f| = c\int f = \mathrm{Re}(c\int f) = \int \mathrm{Re}(cf) \leqq \int |cf| = \int |f|$. En ambos casos f integrable sii $\int |f|$ es finita; llamamos $\|f\|_{L^1} = \int |f|$ y $L^1(X, \mathbb{R})$ o $L^1(X, \mathbb{C})$ a los conjuntos de funciones integrables $f : X \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ cocientados por la relación de equivalencia $f \sim g$ sii $f = g$ salvo en un conjunto nulo, o sea, sii $\|f-g\|_{L^1} = 0$; forman un espacio normado. Convergencia dominada: si f_n, ϕ integrables, $|f_n| \leqq \phi$, entonces $\int \underline{\lim} f_n \leqq \underline{\lim} \int f_n \leqq \int \overline{\lim} f_n \leqq \int \overline{\lim} f_n$, la primera desigualdad porque Fatou da $\int \underline{\lim}(f_n+\phi) \leqq \underline{\lim} \int (f_n+\phi)$, y restando $\int \phi$ a ambos lados (porque es finita) sale; la segunda es obvia; la tercera porque Fatou da $\int \underline{\lim}(\phi - f_n) \leqq \underline{\lim} \int(\phi - f_n)$, y restando de nuevo $\int \phi$ y notando que $\underline{\lim}(-f_n) = -\overline{\lim} f_n$ sale; en particular si $f = \lim f_n$, $\int f = \lim_n \int f_n$.

Espacios L^p. Primero $p = \infty$: decimos que M es *cota esencial* de f medible si $|f| \leqq M$ salvo en un conjunto nulo; el ínfimo de las cotas esenciales, que llamamos $\|f\|_{L^\infty}$, es cota esencial, porque $\mu(|f| > \|f\|_{L^\infty}) = \mu(\bigcup_{n\geqq 1}\{|f| > \|f\|_{L^\infty} + \frac{1}{n}\}) = 0$; cocientando por la relación coincidir en un conjunto nulo $\|\|_{L^\infty}$ es una norma sobre el conjunto L^∞ de las f con $\|f\|_{L^\infty} < \infty$. Si $1 \leqq p < \infty$ ponemos $\|f\|_{L^p} = (\int |f|^p)^{1/p}$. Si $\|f\|, \|g\| \neq 0$, $\left(\frac{\|f+g\|}{\|f\|+\|g\|}\right)^p = \left\|\frac{f+g}{\|f\|+\|g\|}\right\|^p =$

$$\int \left|\frac{\|f\|}{\|f\|+\|g\|}\frac{f}{\|f\|} + \frac{\|g\|}{\|f\|+\|g\|}\frac{g}{\|g\|}\right|^p \leqq \int \left(\frac{\|f\|}{\|f\|+\|g\|}\left|\frac{f}{\|f\|}\right|^p + \frac{\|g\|}{\|f\|+\|g\|}\left|\frac{g}{\|g\|}\right|^p\right) = 1,$$

así que tenemos desigualdad triangular $\|f+g\|_{L^p} \leqq \|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}$. Además Hölder: si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, para $p, q \in [1, +\infty]$ entonces $\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \geqq \|fg\|_{L^1}$, porque si $\|f\|_p, \|g\|_q \neq 0$,

$$\frac{\|fg\|_{L^1}}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}} = \int \left(\frac{|f|^p}{\int |f|^p}\right)^{1/p}\left(\frac{|g|^q}{\int |g|^q}\right)^{1/q} \leqq \int \left(\frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\int |f|^p} + \frac{1}{q}\frac{|g|^q}{\int |g|^q}\right) = 1.$$

Convergencia en L^p, $1 \leqq p < \infty$. Decimos que $f_n \to f$ en L^p si $\lim \|f_n - f\|_{L^p} = 0$; implica en medida. Decimos que $\{f_n\}$ medibles son *uniformemente* L^p sii (i) hay M con $\|f_n\|_{L^p} \leqq M$, (ii) $\lim_{M\to\infty} \sup_n \int_{|f_n|\geqq M} |f_n|^p = 0$ y (iii) $\lim_{\delta\to 0} \sup_n \int_{|f_n|<\delta} |f_n|^p = 0$. Condiciones suficientes: hay $\phi \in L^p$ con $|f_n| \leqq \phi$; $\mu(X) < \infty$ y $\lim_{M\to\infty} \sup_n \int_{|f_n|\geqq M} |f_n|^p = 0$; $\mu(X) < \infty$ y $\|f_n\|_{L^q} \leqq M$ con $p < q$; f_n es una sucesión de Cauchy en L^p. Implica que para todo $\epsilon > 0$ hay $\delta > 0$ tal que $\int_E |f_n|^p < \epsilon$ para todo n y todo E medible con $\mu(E) < \delta$. Implica que $f_n \to f$ en medida sii en L^p. (Primero vemos por Fatou que $f \in L^p$ tomando una subsecuencia. Sea $\epsilon > 0$. Pido κ_0 tal que $\int_{|f_n|<\kappa_0} |f_n|^p < \frac{\epsilon}{2^p 3}$ y $\int_{|f|<\kappa_0} |f|^p < \frac{\epsilon}{2^p 3}$; pido $\kappa < \frac{\kappa_0}{2}$; pido M con $\|f_n\|_{L^p}^p \leqq M$; pido $\delta^p < \frac{\epsilon\kappa^p}{3M}$ y $\delta < \kappa$; entonces $\int_{\substack{|f_n-f|<\delta\\|f_n|<\kappa}} |f|^p < \frac{\epsilon}{2^p 3}$, porque ahí $|f| \leqq |f_n| + |f_n - f| < 2\kappa < \kappa_0$, y $\int_{\substack{|f_n-f|<\delta\\|f_n|<\kappa}} |f_n - f|^p < \frac{\epsilon}{3}$; además $\int_{\substack{|f_n-f|<\delta\\|f_n|\geqq\kappa}} |f_n - f|^p \leqq \delta^p\mu(|f_n| \geqq \kappa) \leqq \frac{\delta^p}{\kappa^p}M < \frac{\epsilon}{3}$; pido ϵ_0 tal que $\int_E |f_n| < \frac{\epsilon}{2^p 3}$ y $\int_E |f| < \frac{\epsilon}{2^p 3}$ si $\mu(E) < \epsilon_0$; pido n_0 tal que si $n \geqq n_0$ entonces $\mu(|f_n - f| \geqq \delta) < \epsilon_0$; entonces $\int_{|f_n-f|\geqq\delta} |f_n - f| \leqq \int_{|f_n-f|\geqq\delta} |f_n| + \int_{|f_n-f|\geqq\delta} |f| < \frac{\epsilon}{3}$. Queda que si $n \geqq n_0$, $\int |f - f_n|^p = \int_{|f_n-f|\geqq\delta} |f_n - f|^p + \int_{\substack{|f_n-f|<\delta\\|f_n|<\kappa}} |f_n - f|^p + \int_{\substack{|f_n-f|<\delta\\|f_n|\geqq\kappa}} |f_n - f|^p < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$.)

L^p es Banach. Sea $1 \leqq p < \infty$ y $f_n \in L^p$ de Cauchy; es Cauchy en medida, luego tiene una subsecuencia f_{n_k} que converge a una f casi uniformemente y por lo tanto en medida; como Cauchy en L^p implica uniformemente L^p, convergencia en medida implica convergencia L^p y listo. Sigue que si $f_n \in L^p$ y $\sum \|f_n\|_{L^p} < \infty$ entonces hay $f \in L^p$ con $\sum_{n=1}^N f_n \to f$ en casi todo punto y en L^p. También L^∞ es Banach.

Aproximación en L^p, $1 \leqq p < \infty$. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $\epsilon > 0$: existe $g \in L^p$ simple con $\|f - g\|_{L^p} < \epsilon$ (en L^1 es trivial; reducimos a $f \geqq 0$ por linealidad, tomamos M grande con $\int_{|x|\geqq M} f < \frac{\epsilon}{3}$ y $\int_{f\geqq M} f < \frac{\epsilon}{3}$, tomamos $0 \leqq s \leqq f$ simple con $\int_{\substack{|x|<M\\f<M}} (f - s) < \frac{\epsilon}{3M^{p-1}}$ y tenemos $f - s \leqq f$ y $\int(f - s)^p \leqq \int_{|x|\geqq M} f + \int_{f\geqq M} f + \int_{\substack{|x|<M\\f<M}} (f - s)f^{p-1} < \epsilon$), hay intervalos $I_1, \ldots, I_n$ y reales $c_1, \ldots, c_n$ con $g = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{I_i}$ y $\|f - g\|_{L^p} < \epsilon$ (basta aproximar $\mathbb{1}_E$ con $\mu(E) < \infty$ por desigualdad triangular), y hay una función continua y con soporte compacto g con $\|f-g\|_{L^p} < \epsilon$ (basta aproximar $\mathbb{1}_E$ con E intervalo, pero $\max\{1-R\mathrm{dist}(x, E), 0\}$ con R grande lo hace). Sigue que L^p es separable, porque $\sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{I_i}$ con $c_i \in \mathbb{Q}$ y I_i binario es un conjunto denso y numerable. Vale que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es medible sii es límite puntual en casi todo punto de funciones continuas (basta ver que para cada $n \geqq 1$ hay h_n continua con $\mu(B(0,n) \cap \{|f - h_n| \geqq \frac{1}{n}\}) < \frac{1}{2^n}$; ahora hay $E \subset B(0,n)$ con $\mu(B(0,n) \setminus E) < \frac{1}{2^{n+1}}$ donde f es acotada y por tanto $f\mathbb{1}_E \in L^1$, luego h_n continua con $\|f\mathbb{1}_E - h_n\|_{L^1} < \frac{1}{2^{n+1}n}$ funciona).

Medida producto. Si $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X)$ y $(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ definimos el *producto* de σ-álgebras $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ como la σ-álgebra generada por $\{E \times F \mid E \in \mathcal{B}_X, F \in \mathcal{B}_Y\}$. Tenemos $E \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y \Rightarrow E_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in E\} \in B_Y$; $f : X \times Y \to Z$ morfismo implica $f_x : Y \to Z$ dada por $f_x(y) = f(x,y)$ morfismo. La σ-álgebra de Lebesge de $\mathbb{R}^{d+d'}$ es la completación del producto de las de $\mathbb{R}^d$ y $\mathbb{R}^{d'}$. Si X e Y son σ-finitas hay una única medida $\mu_{X\times Y}$ en $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ que cumple $\mu_{X\times Y}(E \times F) = \mu_X(E)\mu_Y(F)$ cuando $E \in \mathcal{B}_X, F \in \mathcal{B}_Y$ (los $E \times F$ forman un semi-anillo; $\mu_0(E \times F) = \mu_X(E)\mu_Y(F)$ es pre-medida: hay que ver que si $\{E_n \times F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son disjuntos y su unión es $E \times F$ entonces $\mu_X(E)\mu_Y(F) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_X(E_n)\mu_Y(F_n)$; integramos la identidad $\mathbb{1}_E(x)\mathbb{1}_F(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{E_n}(x)\mathbb{1}_{F_n}(y)$ con x fijo y por convergencia monótona queda $\mathbb{1}_E(x)\mu_Y(F) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{E_n}(x)\mu_Y(F_n)$; integramos en x y queda lo que se quería; como X e Y son σ-finitos, $X\times Y$ también y la extensión de Hahn-Kolmogorov de μ_0 da una única medida $\mu_{X\times Y}$ sobre $X \times Y$ con $\mu_{X\times Y}(E\times F) = \mu_X(E)\mu_Y(F)$, como queríamos). En $L^p(X\times Y)$ las $\mathbb{1}_E(x)\mathbb{1}_F(y)$ o sea $\mathbb{1}_{E\times F}$ son densas.

Tonelli. Si X, Y son σ-finitos y $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ es medible entonces $\int_Y f(x,y)\, dy$ y $\int_X f(x,y)\, dx$ son medibles y $\int f = \int_X(\int_Y f(x,y)\, dy)\, dx = \int_Y(\int_X f(x,y)\, dx)\, dy$ (basta verlo para $\mu_X(X), \mu_Y(Y) < \infty$; basta verlo por límite para funciones simples; por linealidad para funciones $\mathbb{1}_S$ con $S \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$; sea $\mathcal{C}$ el conjunto de los S que verifican; por convergencia monótona y finitud es una clase monótona; falta ver que $E \times F$ funciona porque su álgebra generada, o sea sus uniones finitas disjuntas, sale con eso; para $E \times F$ es obvio). Corolario: si $E \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ es nulo, $E_x = \{x \in Y \mid (x,y) \in E\}$ es $\mathcal{B}_Y$-nulo para casi todo $x \in X$. Tonelli para completos: si X, Y son completos y σ-finitos y $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ es $\overline{\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y}$-medible, entonces: $f(x, -)$ es $\mathcal{B}_Y$-medible salvo para un conjunto nulo de X, $\int_Y f(x,y)\, dy$ existe y $x \mapsto \int_Y f(x,y)\, dy$ es $\mathcal{B}_X$ medible; además $\int f\, d\overline{\mu_X \times \mu_Y} = \int_X(\int_Y f(x,y)\, d\mu_Y(y))\, d\mu_X(x) = \int_Y(\int_X f(x,y)\, d\mu_X(x))\, d\mu_Y(y)$ (ponemos f como límite de funciones simples en $\overline{\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y}$, que, salvo un conjunto de medida cero Z, son medibles en $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$; $\tilde{f}$ igual a f fuera de Z y constante en Z es $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$-medible; por Tonelli, su corolario y completitud de X, Y tenemos lo buscado). Fubini: si X, Y son completos σ-finitos, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es L^1 en $\overline{\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y}$ entonces $f(x, -)$ es L^1 en $\mathcal{B}_Y$ salvo para un conjunto nulo de X, $\int_Y f(x,y)\, dy$ existe y $x \mapsto \int_Y f(x,y)\, dy$ es L^1 en $\mathcal{B}_X$; además $\int f\, d\overline{\mu_X \times \mu_Y} = \int_X(\int_Y f(x,y)\, d\mu_Y(y))\, d\mu_X(x) = \int_Y(\int_X f(x,y)\, d\mu_X(x))\, d\mu_Y(y)$. Fubini-Tonelli: si $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es $\overline{\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y}$-medible y $\int_X(\int_Y |f(x,y)|\, dy)\, dx < \infty$ entonces es L^1.

Convolución. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d), g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqq p, q \leqq \infty$, se define la convolución $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)\, dy$; vale $f * g = g * f$. (Young) Si $q = 1$, $f * g \in L^p$ y $\|f * g\|_{L^p} \leqq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1}$ (hay que notar que $\int |f(x-y)||g(y)|\, dy \leqq (\int |f(x-y)|^p |g(y)|\, dy)^{\frac{1}{p}} (\int |g|)^{1-\frac{1}{p}}$ y usar Fubini). Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f * g \in L^\infty$, $\|f * g\|_{L^\infty} \leqq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$ y es uniformemente continua. (Regularización) Sea $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int \rho = 1$, y $\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\rho(\frac{x}{\epsilon})$; ejemplo $\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & \text{si } |x|<1 \\ 0, & \text{si } |x|\geqq 1 \end{cases}$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqq p < \infty$, $\|f * \rho_\epsilon - f\|_{L^p} \to 0$ si $\epsilon \to 0$.

Diferenciación [sd]. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es L^1, para casi todo punto vale $\lim_{r\to 0} \frac{1}{B(x,r)} \int_{B(x,r)} |f - f(x)| = 0$ y $f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{B(x,r)} \int_{B(x,r)} f$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona, es derivable en casi todo punto, y $\int_a^b f' \leqq f(b) - f(a)$. Defino $V_a^b f = \sup\{\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \mid a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$; si $V_a^b f < \infty$ digo que f es de *variación acotada*; equivale a que $f = u - v$, con u, v monótonas. Digo que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es *absolutamente continua* si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que dados $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$, con $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, vale $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$; implica variación acotada; f' es L^1 y $f(b) - f(a) = \int_a^b f'$.

Medidas con signo. Una *medida con signo* es una función $\mu : \mathcal{B} \to [-\infty, +\infty]$ tal que $\mu(\varnothing) = 0$, μ puede valer $-\infty$ y $+\infty$ pero no los dos, y si E_n son disjuntos, $\sum_{n=1}^\infty \mu(E_n)$ converge a $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty E_n)$. Teorema de descomposición de Hahn: si μ es una medida con signo hay una partición $X = X_+ \cup X_-$ tal que $\mu|_{X_+} \geqq 0$ y $\mu|_{X_-} \leqq 0$ (asumimos que μ nunca vale $+\infty$; sea $m = \sup\{\mu(E) \mid \mu|_E \geqq 0\}$; sean E_n tales que $\mu(E_n) \to m$; sea X_+ la unión; se ve $\mu|_{X_+} \geqq 0$ y $\mu(X_+) = m$; sea $X_- = X \setminus X_+$; supongamos que hay $E_1 \subset X_-$ con $\mu(E_1) > 0$; si $\mu|_{E_1} \geqq 0$, $\mu(X_+ \cup E_1) > m$, absurdo; entonces hay $E_2 \subset E_1$ con $\mu(E_2) > \mu(E_1)$; tomo $E_2 \subset E_1$ con $\mu(E_2) \geqq \mu(E_1) + \frac{1}{n_1}$ con n_1 natural mínimo, y así recursivamente E_n; vemos que $n_k \leqq n_{k+1}$; sea $E = \bigcap_{n=1}^\infty E_n$; tenemos $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \geqq \mu(E_1) + \sum_k \frac{1}{n_k}$ es finito así que $n_k \to +\infty$ y E no puede tener un subconjunto con medida mayor, así que $\mu|_E \geqq 0$, absurdo). Decimos que $\mu_1 \perp \mu_2$, que son *mutualmente singulares*, sii hay partición $X = E_1 \cup E_2$ con $\mu_1|_{E_2} = \mu_2|_{E_1} = 0$. Descomposición de Jordan: μ con signo se puede descomponer de manera única como $\mu = \mu_+ - \mu_-$ con $\mu_+, \mu_- \geqq 0$ y $\mu_+ \perp \mu_-$. Definimos la *variación total* de μ como $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$. Vale $|\mu|(E) = \max\{\sum_{n=1}^\infty |\mu(E_n)| \mid \bigcup_{n=1}^\infty E_n \text{ partición de } E\}$.

Radon-Nikodym-Lebesgue. Si μ es una medida y ν una medida con signo, ambas σ-finitas, hay una descomposición única $\nu = \mu_f + \nu_s$, donde $\mu_f(E) = \int_E f\, d\mu$, f es medible y $\nu_s \perp \mu$ (por descomposición de Jordan podemos tomar $\nu \geqq 0$; podemos asumir μ y ν finitas; sea M el supremo de $\int_X f\, d\mu$ para f con $\mu_f \leqq \nu$; es finito y se alcanza para una f; hay que ver que $\nu_s = \nu - \mu_f$ cumple $\nu_s \perp \mu$; sea $\epsilon > 0$; si no $(\nu_s - \epsilon\mu)_+ \perp \mu$, hay E con $\mu(E) > 0$, $(\nu_s - \epsilon\mu)|_E \geqq 0$, $\nu_s|_E \geqq \epsilon\mu|_E$ y podemos sumar $\epsilon \mathbb{1}_E$ a f, absurdo; entonces $(\nu_s - \epsilon\mu)_+ \perp \mu$ para todo $\epsilon > 0$ y $\nu_s \perp \mu$). Radon-Nikodym: μ medida, ν medida con signo, ambas σ-finitas, entonces son equivalentes: $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ para alguna f medible, $\nu(E) = 0$ siempre que $\mu(E) = 0$; (si ν es finita) para todo $\epsilon > 0$ hay $\delta > 0$ tal que $\nu(E) < \epsilon$ si $\mu(E) < \delta$. En este caso se dice que ν es *absolutamente continua* con respecto a μ, y se escribe $\nu \ll \mu$; f se llama la *derivada de Radon-Nikodym* de ν respecto a μ y se escribe $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Riesz [sd]. Si X es topológico Hausdorff localmente compacto, una *medida de Borel regular* es una medida positiva μ sobre una σ-álgebra de X que contiene a los borelianos tal que si K es compacto $\mu(K) < \infty$, si $E \subset X$ es medible entonces $\mu(E) = \inf\{\mu(\mathcal{U}) \mid E \subset \mathcal{U}, \mathcal{U} \text{ abierto}\}$ y si E es abierto o medible con $\mu(E) < \infty$ entonces $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset E, K \text{ compacto}\}$. Riesz dice que si $\Lambda : C_c(X) \to \mathbb{R}$ es lineal positiva (tal que si $f \geqq 0$ entonces $\Lambda(f) \geqq 0$; $C_c(C)$ es el conjunto de las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ con soporte compacto) entonces hay medida regular $(\mu, \mathcal{B})$ con $\mathcal{B}$ completo tal que $\Lambda(f) = \int_X f\, d\mu$. También dice que $\theta : \mathcal{M}(X) \to C_0(X)^*$, donde $C_0(X)$ es el conjunto de funciones continuas $X \to \mathbb{C}$ que tienden a 0 en el infinito, $C_0(X)^*$ es $\mathcal{L}(C_0(X), \mathbb{C})$ y $\mathcal{M}(X)$ es el conjunto de las medidas complejas finitas μ tales que $|\mu|$ es regular con la norma $\|\mu\| = |\mu|(X)$, dado por $\theta(\mu)(f) = \int_X f\, d\mu$ es un isomorfismo isométrico.

Derivada Si $U \subset \mathbb{R}$ es abierto y $f : U \to \mathbb{R}$, decimos que es *derivable* en $x \in U$ si existe el límite $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Si f es constante, $f' = 0$; si f, g son derivables, $(f+g)' = f' + g'$, $(af)' = af'$, $(fg)' = f'g + fg'$ y $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ si $g \neq 0$. Si $g : U \to V$, $f : V \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$. Si f tiene un mínimo o un máximo en x, $f'(x) = 0$. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y derivable en (a, b), existe $\xi \in (a, b)$ con $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$. Definimos, si existe, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. Se ve que si $f \in C^{p+1}$, $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + \frac{f^{(p)}(x)}{p!}h^p + \int_0^h \frac{(h-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(x+t)dt$.

Funciones diferenciables. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $f : U \to \mathbb{R}^m$, decimos que es *diferenciable* en $x \in U$ si hay una función lineal $df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h)-f(x)-df_x(h)\|}{\|h\|} = 0$; si existe es única. Vale $dc = 0$ si c es constante, $df_x = f$ si f es lineal, $d(-)_x$ es lineal, y si $a : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ es bilineal, $a(f, g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es derivable con $d(a(f, g))_x = a(df_x, g(x)) + a(f(x), dg_x)$; si $f, g :$

$U \to \mathbb{R}$ con $g(x) \neq 0$, $d(\frac{f}{g})_x = \frac{df_x g(x) - f(x) dg_x}{g(x)^2}$. Si $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{R}^m$, $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$. Definimos las *derivadas parciales* $\partial_i f_j(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f_j(x+he_i) - f_j(x)}{h}$; decimos que $f \in C^1(U)$ si existen para todo $x \in U$ y son continuas (C^k si son k veces derivables); en ese caso f es diferenciable en U, con $df_x(h) = (\partial_i f_j(x))_{ij} h$. Valor medio: si el segmento $[a, b]$ está en U, y $f : U \to \mathbb{R}$ derivable, entonces hay $\xi \in (a, b)$ con $f(b) - f(a) = df_\xi(b - a)$. Función inversa [sd]: si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es C^1 y df_x es iso entonces hay U, V abiertos, $x \in U$, con $f|_U : U \to V$ difeomorfismo (o sea diferenciable y con inversa diferenciable).

Derivadas superiores. Si $f \in C^2(U)$ entonces $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$. Si $f \in C^n(U)$ definimos la diferencial n-ésima como la función n-lineal $d^n f_x$ inducida por $d^n f_x(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_n} f(x)$; por lo anterior es simétrica. Si $g(\lambda) = f(x + \lambda h)$ vale que $g^{(n)}(\lambda) = d^n f_{x+\lambda h}(h, \ldots, h) = f^{(n)}(x + \lambda h) \cdot h^{(p)}$. Vale pues Taylor: $f(x + h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \cdots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(x) \cdot h^{(p)} + \int_0^1 \frac{(1-\lambda)^p}{p!} f^{(p+1)}(x + \lambda t) \cdot h^{(p+1)} d\lambda$.

Cambio de variable [sd]. Sean U, V dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\phi : U \to V$ un difeomorfismo; sea $J : U \to \mathbb{R}_+$ dada por $J(x) = |\det df_x|$. Si $f : V \to \mathbb{R}$ es medible entonces f es integrable en V si y sólo si $x \mapsto f(\phi(x))J(x)$ es integrable en V y vale $\int_V f = \int_U f(\phi(x))J(x)\, dx$.

Derivada de una integral. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $V \subset \mathbb{R}^m$ medible, $f : U \times V \to \mathbb{R}$ medible y $x_0 \in U$. Si $f(x, -) \in L^1(V)$ para todo $x \in B_\epsilon(x_0)$, $f(-, y)$ es diferenciable en $B_\epsilon(x_0)$ para casi todo $y \in V$ y existe $g \in L^1(V)$ tal que $|\partial_j f(x, y)| \leqq g(y)$ para todo $x \in B_\epsilon(x_0)$ y casi todo $y \in V$, entonces si $F(x) = \int_V f(x, -)$, $\partial_j F(x) = \int_V \partial_j(x, -)$. Si $V \subset \mathbb{R}^m$ es abierto acotado y $\partial_j f$ es continua en $U \times \overline{V}$ entonces verifica las hipótesis del teorema anterior.

Ecuaciones diferenciales ordinarias [sd]. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, $F : U \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz y $x_0 \in U$, existe $\delta > 0$ tal que existe una única función $x : [0, \delta] \to U$ derivable tal que $x(0) = x_0$ y $x'(t) = F(x(t), t)$. Si $U = \mathbb{R}^n$ entonces hay una única solución $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$.

Probabilidad Un *espacio de probabilidad* es un espacio medida $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P)$, donde P es una medida positiva con $P(X) = 1$. Una *variable aleatoria* es una función $X : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ medible; define una probabilidad sobre $\mathcal{Y}$ que es $\mu_X(E) = P(X \in E)$, su *distribución*. Decimos que X es una *variable discreta* si $\operatorname{im} X$ es numerable, en cuyo caso $\mu_X(E) = \sum_{x \in E} \mu_X(\{x\})$ y una variable *absolutamente continua* si $\mathcal{Y}$ tiene una medida $\mu_\mathcal{Y}$ y $\mu_X \ll \mu_\mathcal{Y}$, es decir, por Radon-Nikodym, sii hay una función medible $f : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$, la *función de densidad de* X, con $\mu_X(E) = \int_E f\, d\mu_\mathcal{Y}$. Dada $X : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ definimos la *función de distribución* de X como $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dada por $F_X(a) = \mu(X \leqq a)$; cumple que: es monótona, es continua por derecha, $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$; vale que si $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ cumple esas cuatro condiciones entonces hay va X con $F = F_X$ (tomamos la extensión de Hahn-Kolmogorov μ de μ_0 sobre $\mathcal{B}_0$, el semi-anillo de los intervalos $(a, b]$, con $\mu_0((a, b]) = F(b) - F(a)$; ahora ponemos $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $X(x) = x$ con probabilidad μ). Si $X : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, la *esperanza* de X es $\mathbb{E}X = \int X\, dP = \int x\, d\mu_X(x) = \int_0^\infty (\mu(X \geqq t) - \mu(X \leqq -t))\, dt$ (si $\mathbb{E}|X| < \infty$, por Fubini) $= \int_0^\infty (1 - F_X(t) - F_X(-t))\, dt$; es lineal y $\mathbb{E}g(X) = \int g(X) = \int g(x)\, d\mu_X(x)$. La *varianza* de X se define como $\sigma^2(X) = \operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$. Tenemos $\mu(|X| \geqq t) \leqq \frac{1}{t}\mathbb{E}|X|$ y $\mu(|X - \mathbb{E}X| \geqq t) \leqq \frac{1}{t^2}\mathrm{Var(X)}$. La *covarianza* es $\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$ y la *correlación* es $\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}} \in [-1, 1]$. Si X es una va *multivariada*, viz $X : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$, definimos $\mathbb{E}X = (\mathbb{E}X_1, \ldots, \mathbb{E}X_n)$ y $\operatorname{Var}(X) = (\operatorname{Cov}(X_i, X_j))_{i,j=1}^n$.

Independencia. La *probabilidad condicional* de A dado B es $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; esto define una probabilidad en la que $P_B(B) = 1$ y $P_B(B^c) = 0$. A y B se dicen *independientes* si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$; $\{A_i\}_{i \in I}$ se dicen independientes si $P(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i)$ para todo $J \subset I$ finito. Si $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{B}$ para $i \in I$ son σ-álgebras, decimos que son independientes si dados $A_j \in \mathcal{H}_j$ con $j \in J$, $J \subset I$ finito, son independientes. Para ver esto basta comprobar que $P(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i)$ vale para A_i en un conjunto $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{H}_i$ cerrado por intersecciones finitas con $\langle \mathcal{A}_i \rangle = \mathcal{H}_i$ (aplicando el teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin, que dice que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ con $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$, $\varnothing \in \mathcal{B}$, $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$ y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ disjuntos implica $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$, entonces $\langle \mathcal{A} \rangle \subset \mathcal{B}$; se prueba agrandando $\mathcal{A}$ por inducción transfinita: en cada paso se clausura por uniones numerables, luego por complemento y luego por intersecciones finitas; se ve que uno siempre se mantiene en $\mathcal{B}$, usando $A \setminus B = (A^c \cup (A \cap B))^c$, luego cuando termina tiene $\langle \mathcal{A} \rangle \subset \mathcal{B}$). X, Y va se dicen *independientes* sii $\mu(X \in A \wedge Y \in B) = \mu(X \in A)\mu(Y \in B)$ para todos A, B; generan sub-σ-álgebras $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}_\mathcal{Y}) \subset \mathcal{B}$ y $\sigma(Y)$; X, Y independientes equivale a $\sigma(X), \sigma(Y)$ independientes. Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}$ es una σ-álgebra y X una va, decimos que son independientes si $\mathcal{H}$ y $\sigma(X)$ son. Notar que X, Y son independientes sii $\mu_{(X,Y)} = \mu_{X\times Y}$, la medida producto. En ese caso $\mathbb{E}(XY) = \int xy\, d\mu_{(X,Y)}(x, y) = \int xy\, d\mu_{X\times Y} = \int(\int xy\, d\mu_X)\, d\mu_Y = \int y(\int x\, d\mu_X)\, d\mu_Y = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, y $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$. Notar que si X, Y son absolutamente continuas entonces son independientes sii (X, Y) es abs continua y $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ ae (por el teorema de diferenciación de Lebesgue).

Esperanza condicional. Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}$ es una sub-σ-álgebra y $X : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una va, la *esperanza condicional* es una va $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) : (\mathcal{X}, \mathcal{H}) \to \mathbb{R}$ tal que $\int_E \mathbb{E}(X|\mathcal{H}) dP = \int_E X dP$ para todo $E \in \mathcal{H}$; existe (por Radon-Nikodym: $\mu_\mathcal{H}(E) = \int_E X dP$ es una medida sobre $(\mathcal{X}, \mathcal{H})$ y $\mu_\mathcal{H} \ll P|_\mathcal{H}$); es lineal y no negativa. Si $Y : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es otra variable definimos $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|\sigma(Y))$; cumple $\mathbb{E}(f(X)(\mathbb{E}(X|Y) \circ Y)) = \mathbb{E}(f(X)X)$ para toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible. Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$, $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. Si X es $\mathcal{H}$-medible (o sea $\sigma(X) \subset \mathcal{H}$), $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = X$ y $\mathbb{E}(XY|\mathcal{H}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{H})$. Si X es independiente de $\mathcal{H}$, $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X)$.

[El resto lo cubro en mi apunte de economía política.]

Variedades diferenciales. Una *variedad diferencial* de dimensión n es un conjunto X con un *atlas* de dim n. Un *atlas* $\mathcal{A}$ es un conjunto de *cartas* $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$, que son pares $(\mathcal{U}, \varphi)$ con $\mathcal{U} \subset X$, $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ inyectiva y $\varphi(\mathcal{U})$ abierto, compatibles dos a dos y tales que $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$. Dos cartas $(\mathcal{U}, \varphi)$, $(\mathcal{V}, \psi)$ se dicen *compatibles* si $\varphi(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})$ y $\psi(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})$ son abiertos y $\psi\varphi^{-1}|_{\varphi(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})}$ y $\varphi\psi^{-1}|_{\psi(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})}$ son C^∞. $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de variedad trivialmente. Dadas variedades X, Y con atlas $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ podemos formar una variedad $X\times Y$ con un atlas formado por las cartas $(\mathcal{U}\times\mathcal{V}, \varphi\times\psi)$. Dos atlas se dicen *equivalentes* si la unión es un atlas. El *atlas maximal* de una variedad es el conjunto de todas las cartas compatibles con todas las cartas del atlas. Si X es variedad recibe una topología de su atlas, que tiene como subbase $\{\varphi^{-1}(\mathcal{W}) \mid (\varphi, \mathcal{U}) \in \mathcal{A}, \mathcal{W} \subset \varphi(\mathcal{U}) \text{ abierto}\}$; una función $f : Y \to X$ es continua sii $\varphi_i f|_{f^{-1}(\mathcal{U}_i)}$ es continua para todo $i \in I$; dos atlas equivalentes dan la misma topología.

Particiones de la unidad. Las variedades serán T_2, N_2 (base numerable) y localmente compactas. Una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X se dice *localmente finita* si para todo $x \in X$ hay un entorno $\mathcal{U}$ de x con $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i = \varnothing$ salvo para finitos. X se dice *paracompacto* si todo cubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ tiene un refinamiento $\{\mathcal{V}_i\}_{j\in J}$ (o sea $(\forall j \in J)(\exists i \in I)\mathcal{V}_j \subset \mathcal{U}_i$) localmente finito. Toda variedad es paracompacta (tomo base numerable $\mathcal{U}_i$ con $\overline{\mathcal{U}_i}$ compacto; tomo $G_1 = \mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_{k+1} = \mathcal{U}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{j_{k+1}}$ con $\overline{G_k} \subset G_{k+1}$; si $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es cubrimiento tomamos para $i \geqq 3$ un subcubrimiento finito de $\{\mathcal{U}_\alpha \cap (G_{i+1} \setminus \overline{G_{i-2}})\}_{\alpha\in A}$ del compacto $\overline{G_i} \setminus G_{i-1}$, y uno de $\{U_\alpha \cap G_3\}_{\alpha\in A}$ de $\overline{G_2}$; juntando todos tenemos un refinamiento de $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ numerable, localmente finito y formado por abiertos con clausuras compactas). Bump function: $f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t\leqq 0 \end{cases}$, $g(t) = \frac{f(t)}{f(t)+f(1-t)}$, $h(t) = g(t + 2)g(2 - t)$ son C^∞, no negativas, $f|_{(-\infty,0]} = 0$, $g|_{(-\infty,0]} = 0$, $g|_{[1,\infty)} = 1$, $h|_{(-2,2)^c} = 0$ y $h|_{[-1,1]} = 1$; $b(x) = g(x_1) \dots g(x_n)$ es 1 en $[-1, 1]^n$ y 0 afuera de $(-2, 2)^n$. Particiones de la unidad: si $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un cubrimiento abierto hay una flia contable de funciones $\{\phi_i\}$ tales que $0 \leqq \phi_i \leqq 1$, $\sum_i \phi_i = 1$, $\{\operatorname{sop} \phi_i\}$ es localmente finito y, o bien ϕ_i son C^∞ de soporte compacto y $\operatorname{sop} \phi_i \subset \mathcal{U}_\alpha$ para algún α, o $\operatorname{sop} \phi_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha$ (tomo G_k para $\mathcal{U}_i$ con $G_0 = \varnothing$; dado $p \in X$ sea i_p el máximo con $p \in X \setminus \overline{G_{i_p}}$; sea α_p con $p \in \mathcal{U}_{\alpha_p}$ y $(\mathcal{V}, \phi)$ carta en p con $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}_{\alpha_p} \cap (G_{i_p+2} \setminus \overline{G_{i_p}})$ y con $[-2, 2]^n \subset \phi(\mathcal{V})$; pongo $\psi_p = \begin{cases} b\circ\phi & \text{en } V \\ 0 & \text{afuera} \end{cases}$; ϕ_p es 1 en un entorno abierto $\mathcal{W}_p$ de p con soporte compacto en V; para cada $i \geqq 1$ consigo finitos p con $\mathcal{W}_p$ cubriendo $\overline{G_i} \setminus G_{i-1}$ y tenemos funciones ψ_j con soportes localmente finitos y $\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j$ es C^∞ con $\psi > 0$; pongo $\phi_i = \frac{\psi_i}{\psi}$ y listo; si distribuyo las ϕ_i con $\operatorname{sop} \phi_i \subset \mathcal{U}_\alpha$ y sumo tengo ϕ_α con $\operatorname{sop} \phi_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha$, pero quizás no compacto).

Funciones diferenciables. Si X, Y son variedades, una función $f : X \to Y$ se dice C^∞ en $x \in X$ si existen cartas $(\mathcal{U}, \varphi)$, $(\mathcal{U}', \varphi')$ de X, Y con $x \in \mathcal{U}$, $\varphi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}'$ tales que $\psi f \varphi^{-1}$ es C^∞; si vale para una vale para todas; f se dice C^∞ si es para todo $x \in X$. Si $f : X \to Y$ es continua equivalen: f es C^∞; para todo par de cartas $(\mathcal{U}, \varphi)$ de X, $(\mathcal{V}, \psi)$ de Y tales que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ vale $\psi f \varphi^{-1}$ es C^∞; y para todo $\mathcal{V} \subset Y$ abierto y toda $g : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ C^∞ vale $gf|_{f^{-1}(\mathcal{V})}$ es C^∞. Si $f : X \to Y$ es C^∞ y $g : Y \to Z$ es C^∞, gf es C^∞. Llamamos $\mathcal{D}(X, Y) = \{f : X \to Y \mid f \in C^\infty\}$ y $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(X, \mathbb{R})$. Las proyecciones $\pi : X \times Y \to X$ con C^∞; $f_1 : X \to Y_1, f_2 : X \to Y_2$ son C^∞ entonces $f_1 \times f_2$ es C^∞; $\mathcal{D}(X)$ es una $\mathbb{R}$-álgebra con la suma, el producto y las funciones constantes; si $f : X \to Y$ es C^∞ da un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $f^* : \mathcal{D}(Y) \to \mathcal{D}(X)$ dado por $f^*(g) = gf$. Decimos que $f : X \to Y$ es un *difeomorfismo* si es C^∞, biyectiva y f^{-1} es C^∞.

Gérmenes de funciones. Sea X una variedad y $x \in X$; entre los pares $(\mathcal{U}, f)$ con $x \in \mathcal{U}$ abierto y $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ consideramos una relación de equivalencia dada por $(\mathcal{U}, f) \sim (\mathcal{V}, g)$ sii hay $\mathcal{W} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ abierto con $f|_{\mathcal{W}} = g|_{\mathcal{W}}$. A las clases de equivalencia las llamamos *gérmenes de funciones* en x y a su conjunto lo notamos $\mathcal{D}(X)_x$; es una $\mathbb{R}$-álgebra. Tenemos que $\operatorname{ev}_x : \mathcal{D}(X)_x \to \mathbb{R}$ es un morfismo y $M_x = \ker \operatorname{ev}_x$ es un ideal maximal. Por Taylor tenemos que si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ con $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ entorno de 0 es C^∞ entonces $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n g_i(x) x_i$ con $g_i \in C^\infty$; entonces $M_0(\mathcal{U}) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Entonces si X es variedad de dim n, $x \in X$ y $(\mathcal{U}, \varphi)$ es carta con $x \in \mathcal{U}$ entonces $M_x = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ con $\varphi_i = \pi_i(\varphi - \varphi(x))$.

Espacio tangente en un punto. Si $x \in X$ llamamos $T_x X$ al subespacio de $\mathcal{D}(X)_x^*$ dado por $\delta \in T_x X$ sii $\delta(fg) = \delta(f) g(x) + f(x) \delta(g)$; se llaman derivaciones, o vectores tangentes. Si $(\mathcal{U}, \varphi)$ es una carta en x, definimos derivaciones $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\big|_x$ dadas por $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\big|_x (f) = \frac{\partial f}{\partial \varphi_i}\big|_x = \frac{\partial f \varphi^{-1}}{\partial x_i}\big|_{\varphi(x)}$. Veamos que hay un isomorfismo de $\mathbb{R}$-ev $\alpha : T_x X \to (M_x / M_x^2)^*$: dado $\delta \in T_x X$ vemos que $\delta(M_x^2) = 0$, luego ponemos $\alpha(\delta) = \overline{\delta|_{M_x}}$. Inyectiva: si $\alpha(\delta) = 0$, $f \in \mathcal{D}_x(X)$, $\delta(f - f(x)) = \alpha(\delta)([f - f(x)]) = 0$, luego $\delta(f) = \delta(f(x))$, pero eso es $f(x)\delta(1)$ y $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) + \delta(1)$, luego 0. Suryectiva: si $\varphi \in (M_x / M_x^2)^*$, pongo $\delta(f) = \varphi([f - f(x)])$ y se comprueba que $\delta \in T_x X$ y $\alpha(\delta) = \varphi$. Ahora veamos que $\dim(M_x / M_x^2) = n$: dada una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ en x las φ_i generan M_x; veamos que $\overline{\varphi_i}$ generan M_x / M_x^2 como $\mathbb{R}$-ev: si $f \in M_x$, $f = \sum_{i=1}^n g_i \varphi_i$, $\overline{f} = \sum_{i=1}^n \overline{g_i \varphi_i} = \sum_{i=1}^n \overline{g_i(x) \varphi_i} = \sum_{i=1}^n g_i(x) \overline{\varphi_i}$; veamos que $\{\overline{\varphi_i}\}$ es base: aplico $\alpha(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\big|_x)(\varphi_j) = \delta_{ij}$ y se ve li. Entonces $\dim(M_x / M_x^2)^* = n$ con base $\left\{ \overline{\varphi_i}^* = \alpha(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\big|_x) \right\}_{i=1}^n$, luego $\dim T_x X = n$ con base $\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\big|_x \right\}_{i=1}^n$. Se ve que si $(\mathcal{V}, \psi)$ es otra carta vale $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\big|_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_j}{\partial \varphi_i}\big|_x \frac{\partial}{\partial \psi_j}\big|_x$.

Diferencial de una función. Si $f : X \to Y$ es diferenciable definimos $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y$ por $d_x f(\delta) = (g \mapsto \delta(gf))$; es lineal. Si $(\mathcal{U}, \varphi)$ es carta de x y $(\mathcal{V}, \psi)$ de $f(x)$ entonces hay $c_\varphi : T_x X \to \mathbb{R}^n$, $c_\psi : T_{f(x)} Y \to \mathbb{R}^m$ isomorfismos lineales con $c_\varphi(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\big|_x) = e_i$ y $c_\psi(\frac{\partial}{\partial \psi_i}\big|_{f(x)}) = e_i$. Lo que hay que notar es que $c_\psi d_x f c_\varphi^{-1} = (\psi f \varphi^{-1})'(\varphi(x))$. Vale regla de la cadena $d_x(f \circ g) = d_{g(x)} f \circ d_x g$.

Subvariedades. Si $f \in \mathcal{D}(X, Y)$, $x \in X$, $d_x f$ inyectiva, entonces hay cartas $(\mathcal{U}, \varphi)$, $(\mathcal{V}, \psi)$, $x \in \mathcal{U}$, $f(x) \in \mathcal{V}$ con $\tilde{f} = \psi f \varphi^{-1}(x) = (x, 0)$. Si $f \in \mathcal{D}(X, Y)$ decimos que es *immersion* si $d_x f$ es inyectiva para todo $x \in X$. Si f es regular e inyectiva decimos que (X, f) es *subvariedad* de Y. Si además $f : X \to f(X)$ es homeo decimos que es un *embedding*. Si Y es variedad de dim m y $X \subset Y$ decimos que es *subvariedad* de dim n si para todo $x \in X$ hay una carta $(\mathcal{U}, \phi)$ de Y, $x \in \mathcal{U}$, con $\phi(\mathcal{U}) = \mathcal{V} \times \mathcal{W}$, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{m-n}$ abiertos y $\phi(\mathcal{U} \cap X) = \mathcal{V} \times \{0\}$. En ese caso X recibe estructura de variedad con las cartas $(\mathcal{U} \cap X, \pi_1 \phi|_{\mathcal{U} \cap X})$, y $\iota : X \to Y$ es embedding. Si $f : X \to Y$ es embedding, $f(X) \subset Y$ es subvariedad y $f : X \to f(X)$ es difeo. Definimos $r_f(x) = \operatorname{rango}(d_x f)$; vale que $D_n = \{x \in X \mid r_f(x) \leqq n\}$ es cerrado, porque es que se anulen todos los $n+1$ menores de la matriz. Corolario: si $\dim X \leqq \dim Y$ entonces $\mathcal{U} = \{x \in X \mid r_f(x) = \dim X\}$ es abierto, y $f|_U$ es immersion. Si $f \in \mathcal{D}(X,Y)$ y $d_x f$ es sobre entonces hay cartas tales que $\tilde{f}(x,y) = x$; si $d_x f$ es sobre para todo $x \in f^{-1}(y)$ entonces $f^{-1}(y) \subset X$ es subvariedad; y se llama *valor regular*. Decimos que $f : X \to Y$ es *submersión* si $d_x f$ es sobreyectiva para todo $x \in X$ (implica $\dim X \geqq \dim Y$). En ese caso $\mathcal{V} = \{x \in X \mid r_f(x) = \dim Y\}$ es abierto, y $f|_{\mathcal{V}}$ es submersión.

Espacio tangente. Dado X defino $TX = \coprod_{x \in X} T_x X$; sus elementos son (x,v), con $x \in X$, $v \in T_x X$; defino $\pi : TX \to X$ dada por $\pi(x,v) = x$; dada $(\mathcal{U}, \varphi)$ carta de X pongo $T\mathcal{U} = \pi^{-1}(\mathcal{U})$ y $\overline{\varphi} : T\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dada por $\overline{\varphi}(x,v) = (\varphi(x), d_x\varphi(v))$; entendemos $d_x(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}\big|_x) = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$; los $(T\mathcal{U}, \overline{\varphi})$ le dan estructura de variedad a TX de dim $2n$; la topología es la inicial de π. Si $f \in \mathcal{D}(X,Y)$ definimos $df : TX \to TY$ dada por $df(x,v) = (f(x), d_{f(x)}(v))$ y se ve que es diferenciable.

Campos vectoriales. Dado M variedad un *campo* es una función $X : M \to TM$ diferenciable tal que $\pi X = \mathrm{id}_M$, es decir, $X(x) \in T_x M$; el conjunto de los campos se nota $\Gamma(TM)$. Se puede ver como $X : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(X)$ por $X(f)(x) = X(x)(f)$. Definimos el corchete de Lie como $[-,-] : \Gamma(TM)^2 \to \Gamma(TM)$ dado por $[X,Y] = XY - YX$; se verifica que es campo. Dada $(\mathcal{U}, \phi)$ carta $\frac{\partial}{\partial \phi_i} = (x \mapsto \frac{\partial}{\partial \phi_i}|_x)$ son campos en $\mathcal{U}$ tales que $[\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \frac{\partial}{\partial \phi_j}] = 0$. Dado X hay funciones diferenciables $A_1, \ldots, A_n : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ con $X|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}$. Dado X campo, una *curva integral* en $x \in M$ es una función diferenciable $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\sigma(0) = x$ y $X(\sigma(t)) = \dot{\sigma}(t) = d_t\sigma(\frac{\partial}{\partial x}|_t)$. Siempre exiten y sus gérmenes en x son únicos. Dado $p \in M$ hay entorno $\mathcal{U}$ y $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{U} \to M$ C^∞ con $\sigma(t) = \phi_t(p)$ curva integral; vale $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$. X se dice *completo* si para todo $p \in M$ hay una curva integral $\sigma_p : \mathbb{R} \to M$ con $\sigma_p(0) = p$; definimos el *grupo uniparamétrico* por los difeos $\phi_t : M \to M$, $t \in \mathbb{R}$, con $\phi_t(p) = \sigma_p(t)$, y $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.

Derivada de Lie I. Dado $X \in \Gamma(TM)$ y $p \in M$ fijo $\phi : B^1_\epsilon \times \mathcal{U} \to M$ el grupo 1-paramétrico de X. Defino la *derivada de Lie* $L_X : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ por $L_X(f)(p) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(\phi_t(p)) - f(p)}{h} = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 f(\phi_t(p)) = df(\phi_t(p))(\frac{\partial}{\partial t}\big|_0) = df(d(\phi_t(p))(\frac{\partial}{\partial t}\big|_0)) = df(X_p) = X_p(f)$. Si $f : M \to N$ digo que $\tilde{X} \in \Gamma(TN)$ está f-relacionado a $X \in \Gamma(TM)$, $X \sim_f \tilde{X}$, si $\tilde{X} \circ f = df \circ X$; si $X \sim_f \tilde{X}$, $Y \sim_f \tilde{Y}$, $[X,Y] \sim_f [\tilde{X}, \tilde{Y}]$. Dado $f : M \to M$ difeo y X campo defino f_*X campo por $X \sim f_*X$, o sea $f_*X_{f(p)} = d_pf(X_p)$; si $\phi : B^1_\epsilon \times \mathcal{U} \to M$ es 1-grupo de X, $f \circ \phi_t \circ f^{-1}$ es 1-grupo de f_*X; vale $f_*X = X$ sii $f\phi_t = \phi_t f$. Defino $L_X : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ así: $L_X(Y)_p(f) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{(\phi_{-t})_* Y_p(f) - Y_p(f)}{h}$; si ψ_t es 1-grupo de Y en p, $(\phi_{-t})_* Y_p(f) = d\phi_{-t}\psi_s\phi_t(p)(\frac{\partial}{\partial s}\big|_0)(f) = \frac{\partial}{\partial s}\big|_0 f\phi_t\psi_s\phi_{-t}(p)$ y $Y_p(f) = d\phi_s(p)(\frac{\partial}{\partial s}\big|_0)(f) = \frac{\partial}{\partial s}\big|_0 f\psi_s(p)$, por lo que $L_X(Y)_p(f) = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 \frac{\partial}{\partial s}\big|_0 f\phi_{-t}\psi_s\phi_t(p)$. Pongo $K(t,s,u) = f\phi_t\psi_s\phi_u(p)$ y queda $L_X(Y)_p(f) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\big|_{(0,0)} K(-t,s,t) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\big|_{(0,0)} K(0,s,t) - \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\big|_{(0,0)} K(t,s,0) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\big|_{(0,0)} f\psi_s\phi_t(p) - \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\big|_{(0,0)} f\phi_t\psi_s(p) = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 Y_{\phi_t(p)}(f) - \frac{\partial}{\partial s}\big|_0 X_{\psi_s(p)}(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) = [X,Y]_p(f)$. Queda $L_X Y = [X,Y]$. Si $[X,Y] = 0$ resulta $\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t)_* X_p(f) = 0$, $(\phi_t)_* X = X$ y $\phi_t\psi_s = \psi_s\phi_t$.

Teorema de Frobenius I. Si $X_1, \ldots, X_k$ son campos li con $[X_i, X_j] = 0$ y $p \in M$ hay carta $(\mathcal{U}, \phi)$ con $p \in \mathcal{U}$ y $\frac{\partial}{\partial \phi_i} = X_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Tomo $f^i : B^1_\epsilon \times \mathcal{U} \to M$ con $df^i_t(x)(\frac{\partial}{\partial t}) = X_i(f^i_t(x))$, $f^i_0(x) = x$ y pongo $\phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = f^1_{x_1} \ldots f^k_{x_k} \psi^{-1}(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, con ψ carta, $\psi(p) = 0$; como $[X_i, X_j] = 0$ vale $f^i_{x_i} f^j_{x_j} = f^j_{x_j} f^i_{x_i}$; vale $\frac{\partial \psi_j \phi^{-1}}{\partial x_i}\big|_0 = X_i(p)(\psi_j)$ si $i \leqq k$ y $\frac{\partial \psi_j \phi^{-1}}{\partial x_i}\big|_0 = \delta_{ij}$ si $i > k$; entonces ϕ^{-1} es localmente difeo; $\frac{\partial}{\partial \phi_i}\big|_x = \frac{\partial - \circ \phi^{-1}}{\partial x_i}\big|_{\phi(x)} = d_{\phi(x)}\phi^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i}) = X_i(x)$ si $i \leqq k$, listo.

Grupos de Lie. Un *grupo de Lie* G es una variedad con estructura de grupo cuyas operaciones son C^∞; notamos $L_g : G \to G$ el difeo $h \mapsto gh$. Un campo X es *invariante a izquierda* si $dL_g \circ X = X \circ L_g$; hay un isomorfismo entre T_eG y el esacio $\mathcal{G}$ de campos invariantes a izquierda: mando $v \in T_eG$ a $X_v(g) = d_eL_g(v)$ y mando X a $X(e)$; $\mathcal{G}$ es álgebra de Lie porque $[X,Y] \in \mathcal{G}$ si $X, Y \in \mathcal{G}$; los $X_v \in \mathcal{G}$ son completos (porque si σ es curva integral en g, $hg^{-1}\sigma$

es curva integral en h y las puedo ir pegando indefinidamente); entonces defino $\exp : T_eG \to G$ por $\exp(v) = \sigma_v(1)$ donde σ es curva integral de X_v con $\sigma_v(0) = e$; vale $\exp(0) = e$, y $\exp(tv) = \sigma_v(t)$ si $t \in \mathbb{R}$ (vale $\sigma_{tv}(u) = \sigma_v(tu)$); sale que si $\phi : G \to H$ es morfismo de grupos de Lie vale $\phi \circ \exp = \exp \circ d_e\phi$ (vale que $\phi(\exp(tv))$ es curva integral de $X_{d_e\phi(v)}$).

Formas. Dada M defino $(T^*M)^{\otimes n} = \coprod_{p\in M}(T_p^*M)^{\otimes n}$ y $\pi : (T^*M)^{\otimes n} \to M$ por $\pi(p, v) = p$; dada carta $(\mathcal{U}, \phi)$ doy carta $(\pi^{-1}(\mathcal{U}), \overline{\phi})$ donde $\overline{\phi}(p, v_1^* \otimes \cdots \otimes v_n^*) = (\phi(p), d_p\phi(v_1)^* \otimes \cdots \otimes d_p\phi(v_n)^*)$ y se extiende por linealidad. Un *campo de covectores* de grado r es una función $\alpha : M \to (T^*M)^{\otimes n}$ diferenciable con $\pi\alpha = \mathrm{id}$; su espacio se nota $\Gamma((T^*M)^{\otimes n})$. Si $(\mathcal{U}, \phi)$ es carta, $\alpha|_\mathcal{U} = \sum_{i_1,\dots,i_n} \alpha_{i_1,\dots,i_n} d\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes d\phi_{i_n}$ con $\alpha_{i_1,\dots,i_n} \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$; $\alpha(p)$ se puede ver como multilineal $(T_pM)^n \to \mathbb{R}$ por $d_p\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes d_p\phi_{i_n}(v_1, \dots, v_n) = d_p\phi_{i_1}(v_1)\dots d_p\phi_{i_n}(v_n)$. Defino $\bigwedge^n T^*M = \coprod_{p\in M} \bigwedge^n T_p^*M$ con $\pi(p, v) = p$ y dada carta $(\mathcal{U}, \phi)$ doy carta $(\pi^{-1}(\mathcal{U}), \overline{\phi})$ por $\overline{\phi}(p, v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*) = (\phi(p), d_p\phi(v_1)^* \wedge \cdots \wedge d_p\phi(v_n)^*)$ extendido por linealidad. Una *n-forma* es una función $\omega : M \to \bigwedge^n T^*M$ diferenciable con $\pi\omega = \mathrm{id}$; su espacio se nota $\Omega^n(M)$. Si $(\mathcal{U}, \phi)$ es carta, $\omega|_\mathcal{U} = \sum_{i_1<\dots<i_n} \omega_{i_1,\dots,i_n} d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_n}$; $\omega(p)$ se puede ver como forma multilineal alternada $(T_pM)^n \to \mathbb{R}$ por $d_p\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d_p\phi_{i_n}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\mathrm{sig}\sigma} d_p\phi_{i_1}(v_{\sigma_1})\dots d_p\phi_{i_n}(v_{\sigma_n})$. Si $f : M \to N$ defino $f^* : \Omega^n(N) \to \Omega^n(M)$ por $f^*\omega(x)(v_1, \dots, v_p) = \omega(f(x))(df(v_1), \dots, df(v_p))$. Si X es campo y $\omega \in \Omega^n(M)$ defino $i_X\omega \in \Omega^{n-1}$ por $i_X\omega(v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega(X, v_1, \dots, v_{n-1})$.

Complejo de De Rham. Dada M formamos $\Omega(M) = \bigoplus_{n\geqq 0} \Omega^n(M)$, el álgebra graduada alternada, con $\omega\wedge\eta(p) = \omega(p)\wedge\eta(p)$. Definimos el *diferencial* $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$ así: dada $\omega \in \Omega^n(M)$, $(\mathcal{U}, \phi)$ carta, $\omega|_\mathcal{U} = \sum_{i_1<\dots<i_n} \omega_{i_1,\dots,i_n} d\phi_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\phi_{i_n}$, pongo $d\omega|_\mathcal{U} = \sum_{i_1<\dots<i_n} d\omega_{i_1,\dots,i_n}\wedge d\phi_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\phi_{i_n}$, y pegando obtengo $d\omega \in \Omega^{n+1}(M)$. Vale $d^2 = 0$ y $d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^n\omega\wedge d\eta$, si $\omega \in \Omega^n(M)$. Las formas de $\operatorname{im} d$ se dicen *exactas* y las de $\ker d$ se dicen *cerradas*. Si $f : N \to M$, $f^* : \Omega(M) \to \Omega(N)$ es morfismo de complejos y de álgebras, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ y $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$; $i_X(\omega \wedge \eta) = i_X\omega \wedge \eta + (-1)^n\omega \wedge i_X\eta$.

Derivada de Lie II. Dado $X \in \Gamma(TM)$ defino $L_X : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$ por $L_X\omega = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\phi_t^*\omega-\omega}{t}$. Notar $L_X(\omega + \eta) = L_X\omega + L_X\eta$, $L_X(\omega \wedge \eta) = L_X\omega \wedge \eta + \omega \wedge L_X\eta$, $L_Xf = X(f)$, $L_Xdf(v) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{df(d\phi_t(v))-df(v)}{t} = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 df(d\phi_t(v)) = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 v(f\phi_t) = v(\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 f\phi_t) = v(X(f)) = dX(f)(v)$; se ve que $L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$.

Orientabilidad. M de dim m se dice *orientable* si existe $\omega \in \Omega^m(M)$ nunca nula. $\mathcal{A}$ se dice *atlas orientable* si dadas cartas $(\mathcal{U}, \phi)$, $(\mathcal{V}, \psi)$ vale $\det(\frac{\partial\phi_i}{\partial\psi_j})_{ij} > 0$. Vale que M es orientable sii tiene atlas orientable (si ω es orientación, tomo el atlas formado por las $(\mathcal{U}, \phi)$ con $\omega|_\mathcal{U} = f \bigwedge_{i=1}^n d\phi_i$ con $f > 0$; si $\mathcal{A} = (\mathcal{U}_i, \phi_i)_{i\in I}$ es orientable, tomo partición de la unidad $\{f_i\}_{i\in I}$ subordinada a $\{\mathcal{U}_i\}$ y pongo $\omega = \sum_{i\in I} f_i \bigwedge_{j=1}^n d\phi_{ij}$).

Integración I. El *n-símplex* es $\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leqq t_i, \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$. Una *$n$-cadena* es un elemento del $\mathbb{R}$-ev libre de base $\{\sigma : \Delta^n \to M \text{ diferenciable}\}$, llamado $\mathrm{Chain}_n(M)$. Definimos $\partial : \mathrm{Chain}_n(M) \to \mathrm{Chain}_{n-1}(M)$ lineal por $\partial\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i\sigma^i$, con $\sigma^i : \Delta^{n-1} \to \mathbb{R}$ dado por $\sigma^i(t_0, \dots, t_{n-1}) = \sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$. Vale $\partial^2 = 0$. Dada una n-cadena $\sigma = \sum_{i=1}^m a_i\sigma_i$ y una n-forma ω en $\mathbb{R}^n$, $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, defino $\int_\sigma \omega = \sum_{i=1}^m a_i \int_{\Delta^n} f\sigma$. Cambio de variables: si $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ es difeo, $\int_{\phi(\mathcal{U})} \omega = \pm \int_\mathcal{U} \phi^*\omega$, donde el signo es el de $\det(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j})_{ij}$. Dada $\omega \in \Omega^p(M)$ y σ una p-cadena, defino $\int_\sigma \omega = \sum_i a_i \int_{\Delta^p} \sigma_i^*\omega$. Teorema de Stokes: $\int_{\partial\sigma} \omega = \int_\sigma d\omega$.

Integración II. Dada M orientada y ω una n-forma con soporte compacto defino $\int_M \omega$ así: tomo atlas orientado $\mathcal{A} = (\mathcal{U}_i, \phi_i)_{i\in I}$, partición de la unidad $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $\operatorname{sop} f_n$ compacto y $\operatorname{sop} f_n \subset \mathcal{U}_n$, y pongo

$$\int_M \omega = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\phi(\mathcal{U}_n)} (\phi_n^{-1})^*(f_n\omega).$$

Vale cambio de variable: si $\phi : N \to M$ es difeo, $\int_M \omega = \pm \int_N \phi^*\omega$, dependiendo de que ϕ mantenga o no orientación. Una variedad con borde M es lo mismo pero las cartas $(\mathcal{U}, \phi)$ son con $\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n_+$, donde $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geqq 0\}$. Defino ∂M como los $p \in M$ con $\phi_n(p) = 0$ (no depende de la carta). Notar que $M \smallsetminus \partial M$ es una variedad normal y ∂M es una de dim $n-1$. Notar que T_pM está definido si $p \in \partial M$ y es de dim n, y que $T_p\partial M$ se puede ver como incluido. Dada una orientación ω sobre M queremos inducir una sobre $T_p\partial M$. En $\mathcal{U}$ definimos $X = -\frac{\partial}{\partial \phi_n}$, pegamos por una partición de la unidad, y orientamos ∂M por $i_X\omega$; esta es la orientación exterior. Con esto vale Stokes: $\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$.

Teorema de Frobenius II. Una *distribución* D de dim k es una función que asigna a cada $p \in M$ un subespacio D_p de T_pM con $\dim D_p = k$ de manera que localmente $D_p = \langle X_1, \ldots, X_k\rangle$, con X_i campos li sobre $\mathcal{U}$. Se dice que $X \in D$ si $X_p \in D_p$; D se dice *involutiva* si $X, Y \in D \Rightarrow [X, Y] \in D$. Sea $f : N \to M$ una subvariedad paramétrica (f y df inyectivas); decimos que (N, f) es *variedad integral* de D si $d_xf(T_xN) \subset D_{f(x)}$ para $x \in N$; notar $\dim N \leqq k$; D se dice *completamente integrable* si para todo $p \in M$ hay (N, f) variedad integral con $\dim N = k$ y $p \in f(N)$. El teorema de Frobenius dice que D es completamente integrable sii es involutiva. Una implicación es fácil. Hago la otra. Dado p tomo $D_x = \langle X_1, \ldots, X_k\rangle$ para $x \in \mathcal{U}$. Tomo ϕ carta con $\frac{\partial}{\partial \phi_i}\big|_p = X_i(p)$ si $i \leqq k$. Defino $\pi : U \to \mathbb{R}^k$ por $\pi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_k)$; notar que $d_x\pi(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}\big|_x) = \sum_{i=1}^k a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\big|_{\pi(x)}$, que $d\pi(X_1), \ldots, d\pi(X_k)$ son li para x en un entorno de p, por lo que $d_x\pi : D_x \to T_{\pi(x)}\mathbb{R}^k$ es iso lineal. Tenemos $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_{\pi(x)} = d_x\pi(\sum_{j=1}^k a_jX_j) = \sum_{j=1}^k a_j d_x\pi(X_j)$ tiene solución única $(a_1, \ldots, a_k)$ y por Cramer son C^∞; entonces defino campos $Y_i(x) = d_x\pi|_{D_x}^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_{\pi(x)})$ que generan D_x. Notar $Y_i \sim_\pi \frac{\partial}{\partial x_i}$, y $d_x\pi[Y_i, Y_j]_x = [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}]_{\pi(x)} = 0$. Como $[Y_i, Y_j]_x \in D_x$ y $d_x\pi|_{D_x}$ es inyectiva, $[Y_i, Y_j]_x = 0$. Entonces hay ψ carta con $Y_i = \frac{\partial}{\partial \psi_i}$ y $\{\psi_i = \text{cte}\}$ para $i > k$ es variedad integral; toda variedad integral (N, f) con $f(N) \subset \mathcal{U}$ es $f(N) = \bigcap_{i=k+1}^n \{\phi_i = c_i\}$. Hay una variedad integral conexa (N, f) con $p \in f(N)$ y $f(N)$ maximal y es única (es el conjunto de los puntos x tales que hay un camino γ C^∞ a trozos de p a x con $\dot\gamma \in D$).